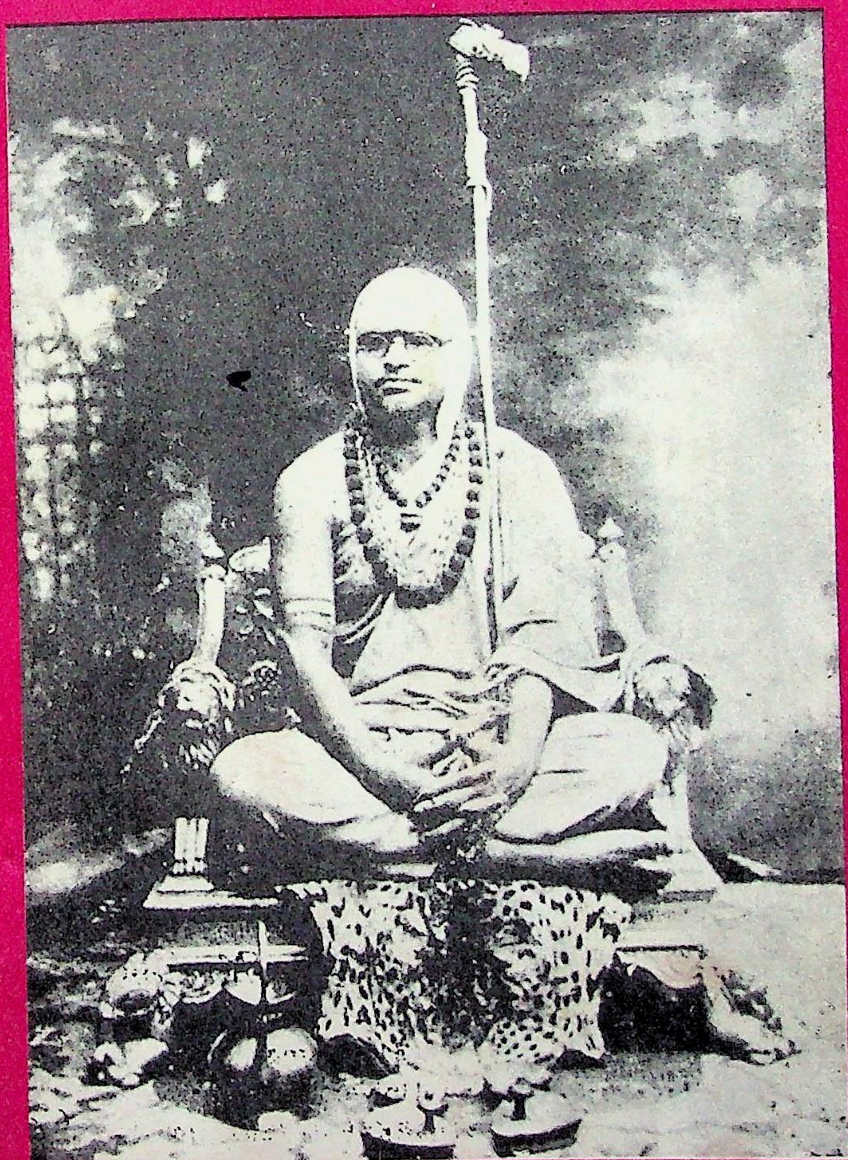
वैदिक गणित

निर्देशिका



जगद्गुरू शंकराचार्य

श्री भारतीकृष्णतीर्थ जी महाराज (1884-1960)

वैदिक गणित

निर्देशिका

वैदिक गणित

निर्देशिका

विद्या भारती प्रकाशन

संस्कृति भवन, कुरुक्षेत्र - 136 118 (हरियाणा)

प्रकाशक :

विद्या भारती अखिल भारतीय शिक्षा संस्थान

संस्कृति भवन, कुरुक्षेत्र – 136 118 (हरियाणा)

प्रथम संस्करण :

वर्ष प्रतिपदा

युगाब्द 5102, वि.सं. 2057

मूल्य : 20 रुपए

आकल्पन :

नीलम रानी

मुद्रण :

दि थानेसर प्रिंटिंग प्रैस,

गीता स्कूल मार्केट, कुरुक्षेत्र

फोन 21526

विषय-सूची

1. वैदिक गणित के सोलह सूत्र एवं उनके अर्थ

1. एकाधिकेन पूर्वेण - पहले से एक अधिक के द्वारा
   By one more than the previous one.
2. निखिलं नवतश्चरमं दशतः - सभी नौ में से तथा अन्तिम दस में से
   All from nine and last from ten.
3. उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् - सीधे और तिरछे दोनों विधियों से ।
   Vertically and crosswise
4. परावर्त्य योजयेत् - विपरीत उपयोग करें ।
   Transpose and apply.
5. शून्यं साम्यसमुच्चये - समुच्चय समान होने पर शून्य होता है
   When the 'Samuchaya' is the same, that 'Samuchaya' is zero.
6. आनुरूप्ये शून्यमन्यत् - अनुरूपता होने पर दूसरा शून्य होता है
   If one is in ratio, the other one is zero.
7. संकलनव्यवकलनाभ्याम् - जोड़कर और घटाकर ।
   By addition and subtraction.
8. पूरणापूरणाभ्याम् - पूरा करने और विपरीत क्रिया द्वारा
   By completion and non completion.
9. चलनकलनाभ्याम् - चलन-कलन की क्रियाओं द्वारा
   By sequential motion.
10. यावदूनम् - जितना कम है ।
    The deficiency

11. व्यष्टिसमष्टि: - एक को पूर्ण और पूर्ण को एक मानते हुए ।
Whole as one and one as whole.

12. शेषाण्यङ्केन चरमेण - अंतिम अंक के सभी शेषों को ।
Remainder by the last.

13. सोपान्त्यद्वयमन्त्यम् - अंतिम । और उपान्तिम का दुगुना।
Ultimate and twice the penultimate.

14. एकन्यूनेन पूर्वेण - पहले से एक कम के द्वारा ।
By one less than the previous one.

15. गुणितसमुच्चय: - गुणितों का समुच्चय ।
The whole product.

16. गुणकसमुच्चय: - गुणकों का समुच्चय ।
Collectivity of multipliers.

उपसूत्र

1. आनुरूप्येण - अनुरूपता के द्वारा ।
Proportionately.

2. शिष्यते शेषसंज्ञ: - बचे हुए को शेष कहते हैं ।
Which remains, is called remainder.

3. आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन - पहले को पहले से, अंतिम को अंतिम से
First by the first and last by the last.

4. केवलैः सप्तकं गुण्यात् - ‘क’, ‘व’, ‘ल’ से 7 गुणा करें। Multiply 'ka' (1), 'va' (4), 'la' (3) by 7 (Formula for 1/7).

5. वेष्टनम् - भाजकता परीक्षण की एक विशिष्ट क्रिया का नाम । The osculation. (A method for divisibility test).

6. यावदूनं तावदूनम् - जितना कम उतना और कम What ever deficiency further lessen that much.

7. यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् - Lessen by the deficiency and use its square.

8. अन्त्ययोर्दशकेऽपि - Sum of last digits is ten.

9. अन्त्ययोरेव - Only by the last.

10. समुच्चयगुणितः - Product of whole.

11. लोपनस्थापनाभ्याम् - By alternate elimination and retention.

12. विलोकनम् - By glancing

13. गुणितसमुच्चयः । समुच्चयगुणितः - Product of the whole is equal to whole of the product.

अन्य विशिष्ट संकल्पनाएँ :-

1. द्वन्द्वयोग - Duplex.
2. शुद्ध - Purity.
3. ध्वजांक - Flag digit.

2. वैदिक गणित पाठ्यक्रम

वर्तमान पाठ्यक्रम में वैदिक गणित की दृष्टि से कक्षानुसार निम्नलिखित विषयों-उपविषयों का भी समावेश किया जाए :-

शिशु प्रथम :-

सूत्र -अवलोकनम्, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण ।

1. उल्टी गिनती, शून्य की कल्पना ।
2. अंकों की पहचान-समानता व असमानता के कारण, भ्रम एवं निवारण । (विभिन्न साधनों के कटआउट, अंगुली घुमाना, रेत पर लिखना आदि)
3. बड़ा-छोटा, लंबा-नाटा, थोड़ा-अधिक, मोटा-पतला, दूर-पास। (विभिन्न साधनों से)
4. आगे-पीछे, पहले-बाद में, अंदर-बाहर की कल्पना (विभिन्न साधनों से)
5. संख्यांक-पहला, दूसरा आदि (विभिन्न साधनों से)
6. परम मित्र कल्पना (1 का 9, 2 का 8, 3 का 7, 4 का 6, 5 का 5, ये परस्पर परम मित्र हैं एवं पूरक अंक हैं।)
7. समय का ज्ञान - प्रातः, दोपहर, सायं, रात्रि ।
8. मासों के नाम, दिनों के नाम
9. आकृतियों की पहचान-धीरे-धीरे अंकों की आकृति तक पहुंचना।
10. गीत के माध्यम से सूत्र याद करना ।
11. एक-एक कंकड़ लेकर एकन्यूनेन पूर्वेण कराते हुए शून्य तक ले जाना एवं शून्य के चिह्न की प्राथमिक जानकारी । सारे क्रिया-कलाप गीत, कहानी व खेल के माध्यम से करना ।

शिशु द्वितीय :-

सूत्र- शिशु प्रथम के अनुसार

1. पुनरावृत्ति, दहाइयों में गिनती, 1 से 100 तक गिनती (उल्टी भी)

2. ऊन का अर्थ -उन्नीस, उनतीस, उनसठ
3. कुछ अन्य आकृतियाँ ।
4. कुछ तिथियों के नाम - अमावस्या, पूर्णिमा ।
5. 1 से 10 तक जोड़ना, घटाना । (सूत्रों का प्रयोग)

कक्षा प्रथम :-

सूत्र - निखिलं नवतः चरमं दशतः एवं पहले के सूत्र

पुनरावृत्ति -

1. परम मित्र की सहायता से जोड़ना । पूरक अंक की सहायता से घटाना (2 में क्या जोड़ें कि 7 बन जाए ।)
2. निखिलं सूत्र का अर्थ (एक एक शब्द का) तथा अभ्यास ।
3. निखिलं की सहायता से घटाना (मौखिक)
4. संख्याओं के नाम 1-100 (मौखिक)
5. 2-2, 4-4, 5-5, 10-10 करके गिनना ।
6. आकृतियाँ
7. घड़ी में घंटे की सूई - एकन्यून, एकाधिक, पूरक का अभ्यास, समय देखना । (केवल घंटे)
8. संख्याओं को दुगुना करना ।
9. तुलना >, <, =
10. क्रम ज्ञान - पहले, बाद में, बीच में
11. 1 से 10 तक पहाड़े वैदिक गणित की रीति से ।
12. चढ़ता-उतरता क्रम ।
13. मुद्रा-सिक्के का ज्ञान (मौखिक) ।
14. हिन्दी अंक लेखन

कक्षा द्वितीय :-

सूत्र :- ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् एवं पूर्व के सूत्र

1. पुनरावृत्ति
2. संख्या ज्ञान - 101 से 999, संख्या व नाम ।
3. योग - 1 से 9, योगफल 9 से अधिक न हो, 9 से 99, योगफल

99 से अधिक न हो, 100 से 999, योगफल 999 से अधिक न हो, योग की जांच विधि (9 पर विभाजित करने पर शेष)

4. पहाड़ा 11 से 20 तक । चार मास पश्चात् वैदिक गणित विधि बतलाना
5. घटाना - तीन अंकों तक (परम मित्र अंक, निखिलं सूत्र)
6. गुणा - एक अंक का एक अंक से, दो अंकों की संख्याओं का ऊर्ध्व तिर्यक् एवं निखिलं से ।
7. शून्य और एक की विशेषता । विनकुलम की कल्पना ।
8. मापों का ज्ञान एवं परस्पर विनिमय-क्रियात्मक पद्धति से
   (क) मुद्रा-रुपए व पैसे
   (ख) तौल-ग्राम, कि० ग्राम
   (ग) लम्बाई-कि०मी०, मीटर, सेंटीमीटर
   (घ) धारिता-लीटर, मि०ली०
   (च) समय-घंटा, मिनट, सेकण्ड
9. घड़ी एवं कैलेण्डर देखना, पढ़ना
10. भिन्न की संकल्पना (1/2, 1/4, 1/8) दैनिक जीवन में उपयोग
11. ज्यामिति-वृत्ताकार, चौकोर, तिकोनी आकृतियाँ, गोलाकार, घनाकार, बेलनाकार (पर्यावरण में उपलब्ध वस्तुओं से)

कक्षा तृतीय :-

सूत्र :-वही

1. पुनरावृत्ति
2. संख्या ज्ञान - पहचानना, पढ़ना, लिखना, स्थानीय मान, प्रसारित संकेतन-शून्य की विशेषता, तुलना, हिन्दी और अंग्रेजी अंकों का ज्ञान ।
3. जोड़ना - 10,000 तक (विधियाँ पूर्ववत्) समस्यात्मक प्रश्न व उत्तर की जांच ।
4. व्यवकलन-10,000 तक (विधियाँ पूर्ववत्) व समस्यात्मक प्रश्न । उत्तर की जाँच । (11 से शेष विधि)
5. गुणा-शून्यांत गुणा, गुणा अधिकतम 3 अंक व गुणांक 2 अंक ।

व्यावहारिक प्रश्न । विचलन का पूर्वाभ्यास (आधार के निकट की संख्याएँ)

6. भाग - चिह्न का ज्ञान
7. चारों मूल क्रियाओं पर आधारित जोड़ने व घटाने के प्रश्न । मिश्रित प्रश्न (निखिलं सूत्र) एक साथ हल करना ।
8. रोमन संख्याएँ 1 से 12 तक - इनकी सीमाएँ, भारतीय पद्धति से तुलना ।
9. मापांक इकाइयाँ - जोड़ना, घटाना - व्यावहारिक प्रयोग ।
10. समय - घड़ी देखना - 1/4, 1/2, 3/4 का ज्ञान ।
11. भिन्न - अंश, हर का ज्ञान । (अंश 1 व हर 10 से बड़ा न हो) तुल्य भिन्न ।
12. ज्यामिति - रेखाखण्ड, किरण, रेखा । (सूत्र - अवलोकनम्) । कोण, समकोण, वर्ग, आयत, त्रिभुज एवं वृत्त, घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोला ।

कक्षा चतुर्थ :-

1. पुनरावृत्ति
2. गणना - एक करोड़ तक (इकाई, दहाई ....)
3. विनकुलम् (4 अंकों की संख्या तक) अभ्यास ।
4. गुणा - ऊर्ध्वतिर्यक् सूत्र (3 अंक x 3 अंक) ।
5. गुणा - रेखांक परिचय (1 अंक x 1 अंक, 2 अंक x 2 अंक)
6. भाग - निखिलं सूत्र (भाजक 3 अंक), परावर्त्य (भाजक 2 अंक), ध्वजांक (भाजक 3 अंक)
7. वर्ग - एकाधिकेन पूर्वेण ।
8. लघुतम समापवर्त्य, महत्तम समापवर्तक
9. भिन्न - जोड़ना, घटाना (हर समान) ।
10. कूटांक परिचय (कादि नव . . . . .) ।
11. विभाजनीयता 2,3,5,7,9,11,13 (विलोकनम् व लिख कर)

(मौखिक प्रश्नों का आग्रह प्रत्येक कक्षा में)

कक्षा पंचम :-

सूत्र :-

1. पुनरावृत्ति
2. गुणा - ऊर्ध्व तिर्यक् (4 अंक x 4 अंक)
3. भाग - ध्वजांक-भाज्य 4, 5 अंक, भाजक - 2 अंक (निखिलं) 3 अंक
4. भिन्न-गुणा, भाग
5. साधारण ब्याज, समानुपात, प्रतिशत
6. विभाजनीयता - 7, 11, 13
7. वर्ग (सभी विधियाँ द्वन्द्व योग छोड़कर)
8. क्षेत्रफल
9. घन की गणना
10. आयतन
11. कूटांक का प्रयोग । मौखिक प्रश्नों पर सर्वत्र आग्रह हो ।

कक्षा षष्ठ :-

1. संख्याएँ :-

अंक, धनात्मक अंक, ऋणात्मक अंक, रेखांक, संख्या, आधार, उपाधार, परममित्र अंक, पड़ोसी अंक, निखिल अंक, चरम अंक ।

2. जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग की सामान्य जानकारी, जोड़ना-उपसूत्र-शुद्धः सूत्र-एकन्यूनेन पूर्वेण । गुणा-एकन्यूनेन पूर्वेण, एकाधिकेन पूर्वेण । आधार एवं उपाधार संख्या से विचलन विधि, ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि, दो अंकों, तीन अंकों वाली दो संख्याओं, तीन संख्याओं का आपस में गुणा ।

भाग-परावर्त्य योजयेत्, ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्-ध्वजांक, एकाधिकेन पूर्वेण।

3. गुणनखंड :-

3.1 विभाजनीयता - (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 29 से)

3.2 महत्तम समापवर्तक-संकलन व्यवकलनाभ्यां विधि

3.3 लघुतम समापवर्त्य-विलोकनम् (विभाजनीयता)

बीजगणित :-

1. गुणा - ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि
2. भाग - परावर्त्य योजयेत्
3. सरल समीकरण - विलोकनम्, शून्यं साम्यसमुच्चये

क्षेत्रमिति :-

क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयतन, कमरे की चारों दीवारों का पृष्ठीय क्षेत्रफल

कक्षा सप्तम :-

अंकगणित

गुणा, वर्ग, वर्गमूल, बीजांक से जाँच

बीजगणित

1. व्यंजकों का गुणनखण्ड (आद्यम् आद्येन अन्त्यम् अन्त्येन)
2. द्विबीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड

कक्षा अष्टम :-

अंकगणित :-

1. (क) वर्ग-यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्
   (ख) वर्गमूल-4 अंकों तक की संख्या का विलोकनम् से (पूर्ण वर्ग का)
2. (क) घन-वैदिक गणित पद्धति
   (ख) घनमूल-6 अंकों तक की संख्या का विलोकनम् से (पूर्ण घन का)
3. चक्रवृद्धि ब्याज में गुणा का उपयोग
4. तीन संख्याओं का, तीन-तीन अंकों का गुणा । (आधार एवं निखिलं सूत्र का उपयोग)

बीजगणित

1. गुणनफल
2. बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड, ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि, द्वन्द्व योग

3. बीजीय व्यंजक के भाग

3.1 एकपदीय से परावर्त्य योजयेत्

3.2 बहुपदीय से भी

4. सरल और युगपत समीकरण

(क) सरल समीकरण (शून्यं साम्य समुच्चये)

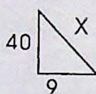
(ख) युगपत् समीकरण (ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् एवं परावर्त्य योजयेत्)

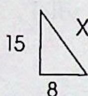
1. $ax^2 + bx + c$ (विलोकनम् द्वारा)

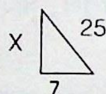
2. $a^2 - b^2$ (संकलन व्यवकलनाभ्याम् विधि)

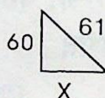
रेखागणित

1. बोधायन संख्याएँ









2. Which set gives a right-angled triangle :-

a. 5, 12, 14

b. 7, 24, 26

c. 8, 15, 18

d. 9, 40, 40

ध्यान रहे कि उपर्युक्त पाठ्यक्रम अनम्य (Rigid) नहीं है । यह लचीला है और प्रत्येक प्रांत अपने सामान्य गणित पाठ्यक्रम के अनुसार आवश्यक परिवर्तन कर सकता है ।

वैदिक गणित पुस्तक सूची

क्र०	पुस्तक का नाम	लेखक/प्रकाशक
1.	वैदिक गणित **VEDIC METAPHYSICS**	जगद्गुरु शंकराचार्य स्वामी भारती कृष्णतीर्थ जी महाराज, मोती लाल बनारसी दास, प्रकाशक एवं पुस्तक विक्रेता, जवाहर नगर दिल्ली-110007
2.	वैदिक गणित पुष्प 1, 2, 3 एवं अन्य साहित्य	डॉ0 नरेन्द्रपुरी रुड़की विश्वविद्यालय, रुड़की (उ0प्र0)
3.	वैदिक गणित समग्र दृष्टि, विहंगम दृष्टि	डॉ0 कैलाश विश्वकर्मा ब्रह्मानंद स्नातकोत्तर महाविद्यालय, राठ, जिला- हमीरपुर, (उ0प्र0)
4.	वैदिक गणित	श्री आनंद वेताल, सुरुचि साहित्य प्रकाशन, झण्डेवाला, नई दिल्ली 110055
5.	वैदिक गणित	श्री रामनाथ शर्मा, तारा पुस्तक भण्डार, बैजनाथ, जिला कांगड़ा, हिमाचल प्रदेश
6.	वैदिक गणित परिचय	अवध बिहारी मिश्र, सम्पादक, रणजीत सिंह लोक शिक्षा एवं शोध संस्थान, 2-ए/411 ए आजाद नगर कानपुर-208002
7.	Ancient Indian Mathematics	DR. B.B. Dutta and Dr. P.N. Singh, Moti Lal Banarsi Dass, Delhi.
8.	Ancient Indian Mathematics	T.S. Bhanumurty, Wiley Eastern Ltd. Lucknow - 226001

9.	गणित का इतिहास	म॰म॰ सुधाकर द्विवेदी, बनारस प्रभाकरी प्रिंटिंग प्रेस वाराणसी - 221001
10.	लीलावती (भास्कराचार्य)	चौखम्बा विद्या भवन, वाराणसी - 221001
11.	सिद्धान्त शिरोमणि (भास्कराचार्य)	चौखम्बा विद्या भवन, वाराणसी - 221001
12.	A Commentry on Bija Ganit of Bhaskaracharya	Krishna Ganak Bija Allavam
13.	Geometry in Ancient and Medieval India	Moti Lal Banarsi Das, Delhi
14.	History of Ancient Indian Mathematics	The World Press Pvt. Ltd. Calcutta
15.	वैदिक गणित भाग 1 व 2	आर्य बुक डिपो, करोल बाग, नई दिल्ली
16.	वैदिक गणित (3 भाग में)	देवेन्द्र भटनागर, विद्या भारती राजस्थान, सेवा धाम, जवाहर नगर, जयपुर - 302004
17.	वैदिक गणित	देवेन्द्र देशमुख, विद्या भारती मध्य प्रदेश, सी - 13, शिवाजी नगर, भोपाल - 462016
18.	Vedic Mathematics (Part I and II)	Dr. S.N. Podyar, Sindhu Prakashana 533-2/VI, Kundapura-576201
19.	Introduction of Vedic Mathematics (Part I & II)	Sh. V.G. Unkalkar, S. Seshachala Rao, H type 16/93, W.C.P. Mills Ltd., Dandeli -581325, Karnatak

ध्यातव्य - अनेक प्रांतीय भाषाओं में भी वैदिक गणित की पुस्तकें लिखी जा चुकी हैं ।

भूमिका

पश्चिम के देशों में गणित का विकास 14वीं शताब्दी (ई0) तक इतना कम था कि स्कूली शिक्षा में जोड़ना और घटाना ही सिखवाया जाता था। उससे पूर्व गिनती भी मालूम न होने के कारण शाम को भेड़ें चर कर पूरी की पूरी लौटीं या नहीं यह जानने के लिए एक भेड़ बाड़े में जाती तो एक पत्थर बाड़े से बाहर किया जाता और सभी पत्थर बाहर हो जाने पर निश्चिन्तता की सांस ली जाती कि सारी भेड़ें आ गईं।

भारत में इससे बहुत पहले सूर्यमण्डल के सभी ग्रहों की सही गति जानने का गणित विकसित हो चुका था । वेदी शुद्ध बनाने की ज्यामिति विकसित हो चुकी थी । समुद्र में चलने वाली नावों की सही दिशा समझने के लिए नक्षत्र मण्डल की गति जानने का विज्ञान विकसित हो चुका था। प्रकाश की गति जानने का विज्ञान विकसित हो चुका था । प्रकाश की गति का ज्ञान और वृत की परिधि नापने की विधि निकाली जा चुकी थी । लीलावती और आर्यभटीय में बीजगणित, चलन-कलन और गति शास्त्र का विकसित रूप मिलता है । ये दोनों ग्रन्थ 19वीं शताब्दी (ई0) तक भारत में गणित की पाठ्य पुस्तक के रूप में चलते रहे ।

प्राचीन काल में लेखन की सर्वसुलभ व्यवस्था न रहने के कारण सारा ही ज्ञानं श्रुति के रूप में प्रकट हुआ । ज्ञान के द्रष्टा ऋषियों ने अपना नाम लेखक के या शोधकर्ता के स्थान पर न रखकर ज्ञान को ईश्वरीय कहा । युग की आवश्यकता के अनुसार गणित की पद्धतियाँ भी ऐसी विकसित हुईं जिनमें अधिक मौखिक और कम ही लिखित कार्य हो सके । मौखिक होने के कारण सरल भी हुआ । अब से 80-90 वर्ष पूर्व हुए रामानुजन् को जितना काम गणित में करना था उसके लिए उनको औसतन एक दस्ता कागज रोज चाहिए था । धनाभाव के कारण उन्होंने प्राचीन भारतीय गणित की पद्धतियाँ विकसित करने का सारा काम न्यूनतम कागज में किया और कोई 50 वर्ष पूर्व जगद्गुरु स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ ने इन्हीं पद्धतियों का

विकास कर आठ वर्षों की कठिन साधना से अद्भुत कार्य किया जिसका एक अंश ''वैदिक गणित'' नामक पुस्तक में उपलब्ध है । उन्होंने अपने कार्य का श्रेय स्वयं न लेकर वेद को ही दिया है ।

वैदिक गणित की पद्धतियों का अभ्यास करने पर उत्तर जल्दी निकलता है और गलती होने की संभावना घटती है । कागज कलम की आवश्यकता न्यूनतम होती है और कई बार तो एक पंक्ति में उत्तर लिखना संभव होता है । आजकल प्रतियोगिता का युग है । विभिन्न पाठ्यक्रमों में नामांकन हेतु परीक्षाएँ होती हैं और सरकारी तथा गैर सरकारी पदों पर चयन हेतु भी परीक्षाएं होती हैं । इनमें गणित के तथा गणित की सहायता से बनने वाले अन्य विषयों के प्रश्न अवश्य होते हैं। इनका हल कम समय में सरलता से और आत्मविश्वास पूर्वक कर सकने वाले परीक्षार्थी को बड़ा लाभ मिलता है । कुछ उदाहरण इसी पुस्तक में ''वैदिक गणित की चमत्कारी झलकियाँ'' शीर्षक से दिए हैं। विद्यालय में भी गणित की पाठ्यपुस्तक के प्रश्नों का हल अधिकतर वैदिक गणित की पद्धति से करना इतना सरल है कि गणित से बचने वाले बालक को भी थोड़े अभ्यास के बाद बड़ा आनन्द आने लगता है। साथ ही उसका स्वाभिमान भी जागता है कि अपने देश में कितनी उच्च कोटि का गणित ज्ञान रहा है ।

वर्तमान पुस्तक आचार्यों के लिए है । आचार्यों का वैदिक गणित में प्रशिक्षण तो आवश्यक ही है परन्तु बिना प्रशिक्षण के भी इस पुस्तक को पढ़कर आचार्य काफी कुछ कर सकें इस उद्देश्य से यह लिखी गई है । बालकों के लिए कक्षाश: पुस्तक की अलग आवश्यकता होगी।

पुस्तक से सम्बन्धित सुझाव आमंत्रित हैं ।

डॉ० देवी प्रसाद वर्मा
प्रोफेसर एवं पूर्व विभागाध्यक्ष
गणित विभाग
साइंस कॉलेज
पटना विश्वविद्यालय

प्राक्कथन

ज्ञान और विज्ञान के क्षेत्र में भारत की अद्वितीय देन है । ज्ञान विज्ञान का ऐसा कोई क्षेत्र नहीं जिसे प्राचीन भारतीय विद्वानों ने न छुआ हो । इतना ही नहीं, इन विद्वानों ने प्रत्येक आयाम को एक विलक्षण विशिष्ट आधारभूत दिशा दी है । इस ज्ञान विज्ञान के क्षेत्र में गणित की आधारभूत संकल्पनाएं तो बहुत ही विशिष्ट हैं । शून्य की कल्पना, संख्या लेखन की दाशमिक प्रणाली का आविष्कार एवं अंकों के स्थानीय मूल्य का स्वरूप प्राचीन भारत की ऐसी देन है जिसके बिना गणित के क्षेत्र में कोई प्रगति सम्भव नहीं थी । शून्य की संकल्पना में भारतीय मनीषियों का वह स्वभाव प्रकट होता है जिससे वे आध्यात्मिकता की वैचारिक अमूर्त अव्यक्त कल्पनाओं को जीवन का सरल अंग बनाने हेतु अत्यंत सहज सरल पद्धतियों का आविष्कार करते थे । प्रो० जे०पी० हालस्टैड ने अपनी पुस्तक "On the Foundation and Technique of Arithmetic" में शून्य के आविष्कार के विषय में लिखा है : "The importance of the creation of the ZERO mark can never be exaggerated, this is not merely giving a habitation but helpful power in the characteristic of the Hindu Race whence it sprang. It is like coining Nirvana into dynamas. No single mathematical creation has been more potent for the general ongo of intelligence and power."

दाशमिक प्रणाली और अंकों के स्थानीय मूल्य का स्वरूप भी गणित के क्षेत्र में अद्भुत सृजन है । इनके प्रयोग से गणित विषय के विकास के कपाट खुल गए । इनके बिना एक हजार दो सौ सतासी को 1287 नहीं लिख सकते । क्योंकि अंक 1, जो 7 से छोटा है, मात्र स्थान के कारण एक हजार बन गया और 7 सात ही रह गया । गणनाओं के सहज होने के कारण अरब के व्यापारियों ने ये सब संकल्पनाएं भारत से सीखीं। लगभग आठवीं शताब्दी में कनक नाम के हिन्दू विद्वान को उज्जैन से

अब्बासईद खलिफजलमनसूर ने बगदाद में गणित एवं गणित ज्योतिष सिखाने के लिए आमंत्रित किया । इनकी सहायता से अरब विद्वानों ने ब्रह्मदत्त द्वारा लिखित ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त का अरबी भाषा में अनुवाद किया। दस अंकों को अरब में 'हिंदसा' नाम दिया गया । अरब से अंकों की संकल्पना यूरोप में पहुंची और वहां इन्हें अरबी अंक (Arabic numerals) का नाम दिया गया ।

यहां यह बात कहने में अतिशयोक्ति न होगी कि मैकाले की शिक्षा पद्धति के भारत में लागू होने से पूर्व भारतीय पाठशालाओं में गणित शिक्षण में द्रुतगति से गणना की वैदिक गणित विधियों का भरपूर उपयोग होता था। यह बात अलग है कि "ये विधियां वैदिक काल से ही विकसित होती रही हैं" यह बताने का कार्य पूज्य स्वामी भारतीकृष्ण तीर्थ जी महाराज ने किया। पू० स्वामी जी ने वैदिक साहित्य का अध्ययन कर अनेक वर्षों की तपस्या के फलस्वरूप इस साहित्य में से 16 सूत्र और 13 उपसूत्र निकाले जिनसे गणित की सभी विधाओं (Arithmetic, Algebra, Geometry-Plane, Solid and Analytical, Trigonometry, Sphere, Conics, Calculus, Statistics etc.) के प्रश्नों को द्रुत गति से एक ही पंक्ति में हल किया जा सकता है । वैदिक गणित की कुछ विशेषताएँ नीचे दी जा रही हैं :-

1. आज की दुरूह गणितीय पद्धतियों के कारण शिशुओं एवं प्राथमिक कक्षाओं के विद्यार्थियों के लिए गणित विषय हउआ बन गया है। वैदिक गणित के प्रश्न सरल, सहज एवं शीघ्र हल करने की पद्धतियां उनके लिए इस विषय को रोमांचक एवं आनन्ददायक बना देती हैं । इस आयु में निर्मित गणित अभिरुचि जीवन भर उनके काम आती है और जिज्ञासा बनी रहती है ।
2. वैदिक गणितीय पद्धति की स्वाभाविक मानसिक प्रणालियों के नियमित अभ्यास से मस्तिष्क का स्वतः ही सर्वांगीण विकास होने लगता है। यह कम्प्यूटर द्वारा प्रश्न हल करने से सम्भव नहीं है ।
3. वैदिक गणित में प्रत्येक गणितीय समस्या को हल करने की अनेक

विधियाँ हैं जिनके प्रयोग से विद्यार्थियों में उत्साह, आनन्द, विश्वास और अनुसंधान प्रवृत्ति का जागरण होता है ।

4. यह गणित अध्ययन के दृष्टिकोण में क्रांति लाने वाला है तथा शोध एवं विकास के लिए नवीन दृष्टिकोण प्रस्तुत करता है ।

5. इस पद्धति में उत्तर की सरल जांच पद्धति सहज रूप में समाविष्ट है ।

6. वैदिक गणित द्वारा हर भारतीय के हृदय में अपने देश, धर्म, संस्कृति और इतिहास के प्रति गौरव की भावना पैदा होती है । इससे अपने महान पूर्वजों के प्रति हमारा मस्तक श्रद्धा से नत हो जाता है । यह भावना Shortcuts in maths कहने से नहीं आ सकती ।

7. वैदिक गणित पद्धति ग्रामीण, वनवासी, गिरिकन्दराओं एवं झुग्गी -झोपड़ी में निवास करने वाले विद्यार्थियों एवं उनके अध्यापकों के लिए विद्या भारती के लक्ष्य के अनुरूप गणित विषय को विशेष रूप से सुखद एवं रोमांचक बनाती है ।

उरोक्त विशेषताओं की झलकी आगे एक अध्याय में दरसायी गई है ।

आचार्यों के लिए संकेत :-

यह पुस्तिका आचार्यों के लिए है । विद्यार्थियों के लिए स्तरानुसार और पाठ्यक्रमानुसार अभ्यासमाला आपको स्वयं बनानी है जो अनेक उदाहरणों एवं आकर्षक चित्रों से युक्त हो । इस पुस्तक में दी हुई अभ्यासमालाएँ विभिन्न स्तर के आचार्यों के लिए तो हैं परन्तु विभिन्न स्तर के विद्यार्थियों के लिए आपके विद्यालय में गणित के सामान्य पाठ्यक्रम आपको ध्यान में रखने होंगे । तारतम्य रखने के लिए कक्षा 2 से कक्षा 5 तक के विद्यार्थियों के लिए गुणा या भाग के अध्याय में सभी विधियां दी गई हैं । अनेक स्थानों पर संकेत दिए गए हैं कि विद्यार्थियों के स्तर व योग्यता के अनुरूप कौन सी विधि एवं कितनी गहराई में पढ़ाई जाए ।

आचार्यो से प्रार्थना है कि सम्पूर्ण पुस्तक को पढ़ने के बाद देखें कि उसकी भाषा में कहां उपयुक्त परिवर्तन की आवश्यकता है और इस

विषय में हमें सूचित भी करें । प्रयास यह किया है कि सभी स्थानों पर भाषा का अर्थ उदाहरण द्वारा समझाया जाए । पाठ्यक्रम का कठोरतापूर्वक पालन सम्भव नहीं था ।

पुस्तक आचार्यों के लिए ही होने के कारण चित्र इत्यादि नहीं दिए गए ।

दीनानाथ बत्रा

महामंत्री

विद्या भारती अखिल भारतीय शिक्षा संस्थान

सहभागिता-सामूहिक चिन्तन

विद्या भारती अखिल भारतीय शिक्षा संस्थान भारत का (विश्व का भी) सबसे बड़ा गैर सरकारी (परन्तु प्रभावी एवं असरकारी) शैक्षिक संगठन है । इस संस्थान के अनेक आचार्य प्राचीन भारतीय सरल गणित से लगभग इसकी स्थापना काल से ही परिचित हो गए थे । वर्तमान गणित पुस्तकों में अलक्षित ये भारतीय गणित पद्धतियां जब स्थान-स्थान पर आचार्यों के समक्ष दरसायी जाती थीं तो उनको गणित विषय में सहज रोमांच की अनुभूति होती थी । गणित कितना सरल एवं आनन्ददायक विषय है यह समझकर उन्हें लगता था कि सामान्य विद्यार्थियों के लिए गणित भारी और दुरूह इसलिए लगता है कि उसे प्राचीन भारतीय पद्धति से नहीं पढ़ाया जाता ।

1987 में रुड़की इंजीनियरिंग विश्वविद्यालय रुड़की (उत्तर प्रदेश) में आयोजित अंतर्राष्ट्रीय वैदिक गणित सम्मेलन के बाद हम सब लोगों को जानकारी मिली कि उपर्युक्त सरल आनन्ददायक पद्धतियों का उद्भव वैदिक काल में हुआ और वैदिक एवं प्राचीन साहित्य में इनका विवरण है । जगद्गुरु शंकराचार्य स्वामी भारती कृष्णतीर्थ जी महाराज ने अनेक वर्षों के तपस्यापूर्वक अध्ययन के आधार पर वेदों में स्थान-स्थान पर दिए वैदिक गणित पद्धतियों के सोलह सूत्र एवं तेरह उपसूत्र एकत्रित किए जिनके आधार पर गणित विषय के सभी विषय उपविषय आह्लाद पूर्वक सीखे जा सकते हैं । उनका कहना था कि ये सूत्र अथर्व वेद के परिशिष्ट के रूप में देखे जा सकते हैं ।

1987 के उपरांत विद्या भारती के आचार्यों ने इन गणितीय सहज सरल आनन्ददायक पद्धतियों को वैदिक गणित के रूप में सीखना आरम्भ किया । अप्रैल 1995 की विद्या भारती साधारण सभा ने निर्णय लिया कि अपने विद्यालयों में गणितीय पाठन में वैदिक गणित का प्रवेश कराया जाए। प्रश्न था कि दुर्गम गणितीय विधाओं वाले प्रश्नों को एक ही पंक्ति में हल करना आचार्यों को सिखाए बिना विद्यार्थियों को सिखाना सार्थक नहीं हो

सकता । इससे भी आगे यदि विद्यार्थी वर्तमान पुस्तकीय जटिल पद्धति से अनभिज्ञ रहें और केवल वैदिक गणित पद्धति ही सीखें तो वर्तमान गणितीय शैक्षिक ढांचे के कारण उनके लिए वर्तमान परीक्षाओं में अच्छे अंक प्राप्त करना असम्भव होगा । इन सब बातों को ध्यान में रखकर यह विचार हुआ कि वैदिक गणित का एक ऐसा कक्षाश: पाठ्यक्रम बनाया जाए जिसे वर्तमान गणित पाठ्यक्रम में अभी अतिरिक्त पद्धति के रूप में प्रविष्ट किया जा सके ।

भाद्रपद कृ० 6-8 वि०सं० 2052 यु० 5097 (16-18 अगस्त 1995) को कुरुक्षेत्र में वैदिक गणित के भारत के विभिन्न स्थानों से आए 52 विद्वानों ने अनेक प्रदेशों के पाठ्यक्रमों का गहन अध्ययन कर शिशु कक्षा से कक्षा 8 तक का वैदिक गणित पाठ्यक्रम तय किया। मा० लज्जाराम तोमर, भाई ब्रह्मदेव शर्मा एवं श्री दीनानाथ बत्रा जी से मार्गदर्शन प्राप्त हुए। यह तय हुआ कि इस पाठ्यक्रम को सभी प्रांतों में लागू किया जाए। दो तीन वर्ष के आचार्यों के प्रशिक्षण एवं विद्यालयी गणित प्रश्नपत्रों में वैदिक गणित पद्धति को हल करने के लिए 5-10 प्रतिशत प्रश्न देने के बाद इस पाठ्यक्रम में आवश्यक हो तो सुधार किया जाए। यह पाठ्यक्रम वैसे भी अनम्य (Rigid) नहीं है ।

तदुपरांत आचार्य निर्देशिका तैयार की जाए जो स्वयं में आचार्यों को स्वतंत्र रूप से वैदिक गणित सिखवाने में समर्थ हो । मार्गशीर्ष कृ० 10-12 यु० 5100 (13-15 नवम्बर 1998) को लखनऊ में आचार्य निर्देशिका तैयार करने के लिए सात बन्धुओं की बैठक का आयोजन हुआ जिनमें निम्नलिखित बंधु उपस्थित हुए- सर्वश्री डॉ० गुज्जरमल्ल वर्मा, देवेन्द्र भटनागर (राजस्थान), देवेन्द्र देशमुख (मध्य प्रदेश), आनन्द वेताल (दिल्ली), डॉ० देवी प्रसाद वर्मा (बिहार), शिवराज भारती (हिमाचल प्रदेश), डॉ०कैलाश (उत्तर प्रदेश) ।

मा० लज्जाराम जी के मार्गदर्शन एवं मा० रोशनलाल सक्सेना, संगठन मंत्री, विद्या भारती, मध्य प्रदेश की उपस्थिति से तीनों दिन सभी को प्रेरणा मिली।

लखनऊ की इस बैठक में दिनरात के परिश्रम से पाण्डुलिपि का स्वरूप बन पाया । परन्तु सब को लगा कि आचार्य निर्देशिका बनाने के लिए यह अवधि कम रही । डॉ० कैलाश के मूल्यवान सुझावों के आधार पर पाठ्यक्रम की विधाओं पर अलग-अलग बन्धुओं को उनकी तैयार की हुई सामग्री में संशोधन करने के लिए प्रार्थना की गई । वैदिक गणित से अनभिज्ञ आचार्यों द्वारा इस पद्धति के अवलोकन का आयोजन श्री सम्पत सिंह जी ने किया । बिना किसी सहायता के मात्र इस पाण्डुलिपि से वैदिक गणित की पद्धति को ये आचार्य समझ सके यह सबके लिए संतोष का विषय था ।

अंत में तय किया कि 6 सप्ताह उपरांत 28-31 दिसम्बर को पुनः संशोधित पाण्डुलिपि तैयार की जाए । इस निमित्त पौष शु० 10-13 युगाब्द 5100 (28-31 दि० 1998) को निम्नलिखित बंधु विद्या भारती मध्य प्रदेश कार्यालय, 13, शिवाजी नगर, भोपाल में उपस्थित रहे- डॉ० कैलाश, सर्वश्री देवेन्द्र भटनागर, देवेन्द्र देशमुख, कौशल प्रसाद साहू, शिवराज सिंह, डॉ० गुज्जरमल्ल वर्मा । सूर्या फाउण्डेशन से श्री आनन्द प्रकाश गुप्ता भी कार्य में सहायता करते रहे ।

डॉ० कैलाश के मार्गदर्शन में निर्देशिका की सामग्री को अंतिम रूप दिया गया। चूंकि पुस्तक के अध्याय अलग-अलग महानुभावों ने तैयार किए थे इसलिए निर्णय लिया गया कि सामग्री के सभी अध्यायों का लेखन स्वरूप समान बनाने का कार्य दिल्ली में हो । इसके साथ समय की कमी के कारण यदि किसी विधा की या ऐसी कोई बात रह गई हो जो पाठ्यक्रम में रखी गई थी तो उसे भी जोड़ा जाए। पाण्डुलिपिं की एक-एक प्रति सभी उपस्थित बन्धुओं को दे दी गई और निवेदन किया गया कि पूरी पाण्डुलिपि को पढ़कर सुधार हेतु सुझाव 31 जनवरी तक दिल्ली भेज दिए जाएं ।

विचार यह भी हुआ कि पुस्तक तैयार होने पर दो बार प्रूफ रीडिंग के उपरांत, शोधित स्वरूप की एक-एक प्रति कुछ बंधुओं को भेज दी जाए

ताकि प्रूफ रीडिंग में यथा सम्भव कोई कमी न रहे। निर्देशिका में पद्धतियों की तर्कसंगतता भी लिखी जाए ।

उपर्युक्त सुझावों को प्राप्त कर एक पाण्डुलिपि बनाई गई । बंगलौर से डॉ० पाडियार एवं रुड़की से डॉ० नरेन्द्र पुरी ने पत्राचार पाठ्यक्रम (Correspondence Courses) की सामग्री भेजने की कृपा की । इनका भी यथोचित उपयोग किया गया । इस प्रकार प्राप्त पाण्डुलिपि में यथा सम्भव कोई त्रुटि न रहे इस हेतु श्रावण शु० 7-14 यु० 5101 में दिल्ली में सूर्या रोशनी के अन्तर्राष्ट्रीय अतिथि गृह में सर्वश्री डॉ० देवी प्रसाद वर्मा, देवेन्द्र भटनागर,. देवेन्द्र देशमुख, इन्द्रजीत सिंह और डॉ० गुज्जरमल्ल वर्मा एक साथ बैठे और आवश्यकतानुसार इसका पुनर्लेखन किया । इस कार्य में मा० बत्रा जी का मार्गदर्शन प्राप्त हुआ ।

गणक (Computer) द्वारा पाण्डुलिपि की कम्पोजिंग के उपरान्त उपर्युक्त चारों बन्धुओं को प्रयोक्ता-परख (user trial) के लिए दस-दस प्रतियां भेजी गईं । प्राप्त सुझावों/सुधारों का समावेश कर तैयार की गई निर्देशिका प्रस्तुत है। उपर्युक्त सभी महानुभावों का मैं हार्दिक आभारी हूँ । स्वामी भारती कृष्णतीर्थ जी महाराज तो सभी वैदिक गणित प्रेमियों के हृदय सम्राट हैं और उनके आध्यात्मिक आशीर्वाद से ही यह लेखन संभव हो पाया है ।

सभी पाठकों से निवेदन है कि भविष्य में इसे अधिक उपयोगी बनाने के लिए अपने सुझाव निःसंकोच भाव से कुरुक्षेत्र भेजने की कृपा करें ।

डॉ० गुज्जरमल्ल वर्मा

राष्ट्रीय संयोजक

वैदिक गणित

वैदिक गणित की चमत्कारी झलकियाँ

गणित के प्रश्नों का द्रुतगति से एक पंक्ति में ही लिखित या मौखिक हल करना वैदिक गणित की विशेषता है। इस अध्याय में कुछ ऐसी ही चमत्कारी झलकियाँ दी जा रही हैं । आगे प्रकरण के अनुसार उनका विस्तृत वर्णन किया जाएगा।

उदाहरण (1) 9999 x 7895 करें।

वर्तमान पद्धति से हल		वैदिक गणित पद्धति से हल	
9999	अथवा	7895	9999
x 7895		x 9999	x 7895
- - - - - - - - -		- - - - - - -	- - - - - - - -
49995		71055	78942105
89991		71055	सूत्र (1) एक न्यूनेन पूर्वेण
79992		71055	7894
69993		71055	(2) निखिलं नवतः चरमं
- - - - - - - -		- - - - - - - -	दशतः 2105
78942105		78942105	

उदाहरण (2) गुणा करें 796 × 794

वर्तमान पद्धति से गुणा	वैदिक गणित पद्धति से हल
ऊपर के समान 6 पक्तियों में	796
	794
	- - - - - - -
	79× 80 / 6×4 या 632024
	सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण से

उदाहरण (3) गुणा करें 9996 × 7689

वर्तमान पद्धति से उदाहरण (1) के समान 7 पक्तियों में गुणन होगा । वैदिक पद्धति निखिलं नवतः चरमं दशतः से आसानी से प्राप्त होती है।

9996 - 0004
7689 - 2311

- - - - - - - - - - - - - -

7685 / 9244 अर्थात् 76859244

उदाहरण (4) गुणा करें 563241 × 241134

वर्तमान पद्धति कितनी दुरूह है यह हम जानते हैं। वैदिक गणित में किसी भी क्रिया के लिए अनेक पद्धतियाँ हैं। यहाँ सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से हल किया जा रहा है।

5 6 3 2 4 1
× 2 4 1 1 3 4

- - - - - - - - - - - - - -

$10_3 2_3 5_2 7_4 0_6 1_4 3_2 3_2 1_1 94 = 135816555294$

उत्तर की जाँच - वर्तमान पद्धति में पुन: क्रिया से ही संभव है। वैदिक गणित में बीजांक के द्वारा शीघ्र जांच होती है। जैसे उदाहरण 3 में 9996 का बीजांक 6 और 7689 का 3 है। गुणा करने पर 6×3 = 18 का बीजांक 9 है। भागफल का बीजांक भी 9 है, अत: उत्तर सही है।

उदाहरण (5) भाग दें 8624892 ÷ 712

वर्तमान पद्धति से

```
712 ) 8624892 ( 12113
      712
      ----
      1504
      1424
      ----
       808
       712
      ----
       969
       712
      ----
      2572
      2136
      ----
शेषफल  436
```

वैदिक गणित की ध्वजांक विधि से

$$7^{12} \left| \frac{8_1 6_1 2_1 4_2 8}{1\ 2\ 1\ 1\ 3} \right| \frac{{}_4 9\ {}_{44} 2}{4\ 3\ 6}$$

भागफल शेष

उदाहरण (6) 231.983361 का वर्गमूल निकालें।

वर्तमान पद्धति में 5 खण्ड बनाकर करना होता है। उत्तर 15.231 होगा । वैदिक गणित में द्वन्द्वयोग पद्धति से इस प्रकार बन जाता है।

$$\begin{array}{c|l} 2 & 2\,{}_{1}3\,{}_{3}1\;.\;9\,{}_{2}8\,{}_{3}3\,{}_{2}3\,{}_{1}6\,{}_{0}1_{0} \\ \hline & 1\;5\;.\;2\;3\;1\;0\;0\;0 \end{array}$$

उदाहरण (7) 432146 का 11 दशमलव अंक तक व्युत्क्रम *(reciprocal)* ज्ञात करें।

वर्तमान पद्धति के अनुसार 1 में 432146 से 11 दशमलव अंक तक भाग देना होता है जो लम्बी प्रक्रिया है। वैदिक गणित में ध्वजांक से इस प्रकार बनाया जा सकता है।

$$\begin{array}{c|l} 4^{32146} & 1.00000\,{}_{1}0\,{}_{2}0\,{}_{2}0\,{}_{3}0\,{}_{3}0\,{}_{5}0\,{}_{5}0 \\ \hline & .00000\;2\;3\;1\;4\;0\;3\;3 \end{array}$$ उत्तर

उदाहरण (8) $\frac{1}{19}$ को आवर्त दशमलव में बदलें।

वर्तमान पद्धति

```
19 ) 1.00......... ( .052631578947368421
     95
     ----
      50
      38
     ----
      120
      114
     ----
        60
        57
       ----
         30
         19
        ----
```

वैदिक गणित पद्धति से एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से गुणन विधि

$\frac{1}{19} = .05\,{}_{1}263\,{}_{1}1\,{}_{1}5\,{}_{1}7\,{}_{1}89\,{}_{1}47\,{}_{1}3\,{}_{1}68421$

आश्लेषक = 2 *(osculator)*

यह क्रिया दाएं से बाएं भी की जा सकती है ।

110
95

150
133

170
152

180
171

90
76

140
133

70
57

130
114

160
152

80
76

40
38

20
19

1

उदाहरण (9) सरल करें $79\frac{8}{11} \times 79\frac{3}{11}$

वर्तमान विधि से

$79\frac{8}{11} \times 79\frac{3}{11}$

$= \frac{877}{11} \times \frac{872}{12}$

```
         877
         872
   ---------------
        1754
       6139x
      7016xx

 121 ) 764744 ( 6320
       726
      ----------
        387
        363
      ----------
        244
        242
      ------------
         24
```

उत्तर $= 6320\frac{24}{121}$

वैदिक विधि से
(सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण)

$79\frac{8}{11} \times 79\frac{3}{11}$

$79 \times 80 / \frac{8}{11} \times \frac{3}{11}$

$6320\ \frac{24}{121}$

(सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण)

उदाहरण (10) वर्ग करें $(7654321)^2$

प्रचलित पद्धति से बहुत कठिन है।

वैदिक गणित के द्वन्द्वयोग से

$$49_8\ 4_{10}\ 6_{11}\ 6_{11}\ 5_{10}\ 4_8\ 4_5\ 6_3\ 5_2\ 0_1\ 0\ 41$$

$$= 58\ 5\ 8\ 8\ 6\ 2\ 9\ 9\ 7\ 1\ 0\ 41$$

उदाहरण (11) घन करें $(9988)^3$

वैदिक गणित के सूत्र निखिलं नवतः चरमं दशतः से

$$(9988)^3 = 9988 - 24 / 3x(-12)^2 / (-12)^3$$

$$= 9964 / 0432 / \overline{1728}$$

$$= 996404318272$$

उदाहरण (12) भाग दें $\left(2x^4 - 3x^3 - 3x - 2\right) \div \left(x^2 + 1\right)$

क्रिया x^2+0x+1	$2x^4 - 3x^3 - 0x^2$	$-3x - 2$
0 -1	2 -3 +0	-3 -2
	0 - 2	
	0	+3
		0 +2
	2 -3 -2	+0 +0

भागफल $2x^2 - 3x - 2$ शेष $= 0$

उदाहरण (13) गुणनखण्ड निकालें ।

$$3x^2 + 7xy + 2y^2 + 11xz + 7yz + 6z^2 + 14x + 8y + 14z + 8$$

क्रिया - वैदिक गणित के लोपनम् स्थापनम् सूत्र से

y, z के लोपन से $3x^2 + 14x + 8 = (x+4)(3x+2)$

z, x के लोपन से $2y^2 + 8y + 8 = (y+2)(2y+4)$

x, y के लोपन से $6z^2 + 14z + 8 = (3z+4)(2z+2)$

गुणनखण्ड $= (x+2y+3z+4)(3x+y+2z+2)$

उदाहरण (14) उस सरल रेखा का समीकरण बताएं जो बिन्दुओं (9, 17) और (7, -2) से गुजरती है।

प्रचलित विधि से -

$y = mx + c$ में मान रखने पर

$17 = 9m + c \qquad - (1)$

$-2 = 7m + c \qquad - (2)$

घटाने पर ;

$19 = 2m$ या $m = \dfrac{19}{2}$

m का मान (1) में रखने पर

$$17 = \frac{9 \times 19}{2} + c$$

$$c = 17 - \frac{171}{2} = -\frac{171 - 34}{2}$$

$$= -\frac{137}{2}$$

समीकरण से

$$y = \frac{19}{2}x - \frac{137}{2}$$

या $2y = 19x - 137$

वैदिक गणित विधि से

$$\begin{Bmatrix} 9 & 17 \\ 7 & -2 \end{Bmatrix}$$

सूत्र परावर्त्य योजयेत् से

$(9-7)\,y = (17+2)\,x - 9\times2 - 17\times7$

या $2y = 19x - 137$

ऊपर के उदाहरणों में सूत्र के संकेत दिए हैं। स्पष्ट है कि वैदिक गणित की विधियाँ लगाने पर प्रश्न सरलता से और कम परिश्रम से हल होते हैं और इस कारण गलती होने की संभावना भी घटती है। थोड़े अभ्यास से गणित विषय रुचिकर और सुगमता से ग्राह्य हो जाता है।

अध्याय 1

संकलन

1.1 परम मित्र अंक - 1 से 10 तक की संख्याओं का अच्छा अभ्यास होने के बाद परममित्र अंक बताना उचित होगा।

1 का परम मित्र 9 है और 9 का 1 है।

2 का परम मित्र 8 है और 8 का 2 है।

3 का परम मित्र 7 है और 7 का 3 है।

4 का परम मित्र 6 है और 6 का 4 है।

5 का परम मित्र 5 है।

यह बार-बार कहलाया जाए। देखा गया है कि 5-10 मिनट में ही शिशु इसे याद कर लेता है। फिर भी इसका बार-बार अभ्यास कराया जाय। 3 का परम मित्र क्या है? 4 किसका परम मित्र है? इस प्रकार के अनेक प्रश्न पूछकर यह कल्पना पक्की कराई जा सकती है।

1.2 उल्टी गिनती - 1 से 10 तक की संख्याओं का अभ्यास होने के बाद 10 से 1 तक उल्टी गिनती का अभ्यास कराना चाहिए।

1.3 एकाधिकेन पूर्वेण - पूज्य स्वामी जी के 16 सूत्रों में यह पहला सूत्र है जिसका ज्ञान इस स्थिति में कराया जा सकता है। अर्थ है, "पहले से एक अधिक के द्वारा" । संख्याएँ इसी प्रकार बढ़ती हैं, 1 से एक अधिक करने पर 2, 2 से एक अधिक करने से 3 इत्यादि।

इस सूत्र का इस प्रकार ज्ञान देकर छात्रों को जोड़ना सिखाया जा सकता है । वैदिक गणित में बिना अंगुलियों की सहायता के बिना हासिल का योग सिखाया जाता है। 3+4 के लिए 3 को 4 बार एकाधिक करना है। पहली बार करने पर 4, दूसरी बार 4 को एकाधिक करने पर 5, तीसरी बार 5 को करने पर 6 और अन्तिम बार में 6 को एकाधिक करने पर 7 आ जाएगा। यह खेल खेल में सिखाया जा सकता है। वास्तविक वस्तुओं के उदाहरण भी दिए जा सकते हैं जैसे एक ढेर 3 कंकड़, चाक या अन्य किसी वस्तु का और दूसरा ढेर 4 का बनाया। फिर 4 वाले इस दूसरे ढेर से 3 वाले ढेर में एक वस्तु मिलाने पर पहले ढेर का एकाधिक हुआ। यह

क्रिया 4 बार की जाए। यहाँ यह भी स्पष्ट हो कि 3 में 4 या 4 में 3 जोड़ना एक समान है । एक दो बार ही वस्तुओं का उपयोग हो, फिर एकाधिक सूत्र से ही जोड़ना सिखाया जाए कि उत्तर 10 से कम आए। आठ दस दिनों में एकाधिक विधि से जोड़कर पूरा अभ्यास संभव है। पूरा अभ्यास होने पर बिना अंगुली और बिना वस्तु के बालक 5+4 या 7+2 पूछने पर तुरन्त 9 कह सके तब आगे बढ़ें। यह कल्पना और परम मित्र की कल्पना ठीक से हो जाने पर बालक को समझ में आ जाता है कि परम मित्र अंकों को आपस में जोड़ने पर 10 होगा ।

इसी बीच 10 तक की उल्टी गिनती और 20 तक की सीधी गिनती का अभ्यास कराया जाए ।

1.4 एक न्यूनेन पूर्वेण - यह पूज्य स्वामी जी का 14वाँ सूत्र है। अर्थ है "पहले से एक कम के द्वारा"। उल्टी गिनती 10 से 1 तक सिखाने के बाद इसके प्रयोग से उल्टी गिनती के सहारे एक अंक का व्यवकलन सिखाया जाय। 5-2 के लिए 5 को एक बार एकन्यून करने पर 4 और फिर से 4 को एकन्यून करने पर 3 आया। इसका खूब अभ्यास कराना चाहिए।

हासिल वाले जोड़ - हासिल वाले जोड़ वैदिक गणित की रीति से बड़ी आसानी से सिखाए जा सकते हैं। इसके लिए 20 तक की गिनती, बिना हासिल के संकलन और परम मित्र अंकों का अच्छा पूर्वाभ्यास चाहिए।

इस तरह वस्तुओं से और परम मित्र से खूब अभ्यास कराएँ। साथ ही 100 तक की गिनती भी एक पर एक 11 और दस एक 11 दोनों ही प्रकार से पक्की कराएँ। एक पर एक 11 की पद्धति से लिखने में सुविधा होगी, दस एक ग्यारह से जोड़ने में सुविधा होगी।

प्रारम्भ में इन्हें मूर्त वस्तुओं से सिखाना अच्छा रहेगा। 8+6 के लिए एक ढेरी 8 कंकड़ों की और एक 6 कंकड़ों की (या किसी अन्य वस्तु जैसे चाक, कंचे आदि की) बनाएँ । 8 का परम मित्र 2 है, अतः दूसरी ढेरी में से 2 कंकड़, निकालें। शेष 4 रहेंगे। 8 और 2 को मिलाने पर परम मित्र होने के कारण 10 बनता है जिसमें 4 मिलाने पर गिनती पढ़ाते समय दस और चार 14 सिखाया है उसके अनुसार 14 बनता है। सम्पूर्ण क्रिया इस

प्रकार है -

8+6 = 8+2+4 = 10+4 = 14

अन्य उदाहरण 8+7 = 8+2+5 = 10+5 = 15

9+5 = 9+1+4 = 10+4 = 14

7+8 = 7+3+5 = 10+5 = 15

इसी बीच यह बताना भी उचित है कि संख्याओं को अदल बदल करने से उस पर कोई असर नहीं पड़ता, जैसे 7+4= 4+7 होता है। अत: जोड़ने मे सदा ही बड़ी में छोटी जोड़ना सरल है । जैसे 4 में 7 न जोड़कर 7 में 4 जोड़ना सुविधाजनक है।

1.5 शून्यांत संख्या का प्रयोग कर जोड़ना -

जिन संख्याओं के अंत में शून्य होता है उन्हें शून्यांत संख्या कहते हैं। जैसे 10, 20, 100, 500, 410, 230 ---------- आदि।
मौखिक जोड़ने में व्यवहार में हम इस विधि का प्रयोग करते भी हैं।

उदाहरण (1) 9+7

हल - 9 में 1 जोड़ें प्राप्त हुआ 10
7 में से 1 कम हुआ बचे 6
10 और 6, सोलह ।

अर्थात् 9+7 = 9+1+6 = 10+6 = 16

उदाहरण (2) 198+87

हल - विलोकनम् से स्पष्ट है कि 198 में 2 जोड़ने पर 200 होगा । 87 में से 2 कम हुये बचे 85 ; अब 200+85 = 285

इस तरह मौखिक जोड़ने का अभ्यास भैया/बहन को कराया जाना चाहिये । मापन इकाइयों मुद्रा, लम्बाई, तौल, धारिता व दशमलव की संख्याओं के जोड़ में भी उपरोक्त पद्धतियाँ लगाई जाती हैं । इनके लिए कक्षा की पुस्तकों के प्रश्न उपरोक्त रीति से हल करवाएँ तथा अभ्यास के लिए अन्य प्रश्न स्वयं बनाएँ । यह बात अगले अध्यायों में भी ध्यान में रखी जाए ।

ध्यातव्य

(1) सूत्र एकधिकेन पूर्वेण के दो भाग हैं

एकाधिक और पूर्वेण

गिनती में सूत्र के आधे भाग एकाधिक का उपयोग किया जा रहा है ।

(2) इसी प्रकार उल्टी गिनती में सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण के आधे सूत्र एकन्यून का प्रयोग हो रहा है ।

अभ्यासमाला

शून्यांत संख्या का प्रयोग कर जोड़िये -

(1)	19+11	(2)	38+62	(3)	43+27
(4)	187+23	(5)	299+31	(6)	475+225

उत्तरमाला

(1)	30	(2)	100	(3)	70
(4)	210	(5)	330	(6)	700

1.6 सूत्र - एकाधिकेन पूर्वेण (एकाधिक चिह्न (˙) के प्रयोग से जोड़ना) -

किसी अंक पर एकाधिक चिह्न (˙) लगाने पर उसका मान एक अधिक हो जाता है । जैसे $\dot{6}$ को "एकाधिक छः" पढ़ेंगे और उसका मान 6+1=7 होगा । कई उदाहरणों से छात्रों को यह समझाया जाए ।

जैसे : $\dot{2} = 2 + 1 = 3$

अथवा $\dot{9} = 9 + 1 = 10$

$9 + \dot{2} = 9 + 3 = 12$

एकाधिक चिह्न (˙) का मान 1 होता है।

इस विधि में संख्याओं को जोड़ते समय अंकों का जोड़ जैसे ही दो अंकों की संख्या में प्राप्त होता है अर्थात् हासिल में एक प्राप्त होते ही बायें अंक (पूर्व अंक) पर एकाधिक चिह्न (˙) बिन्दु लगा देते हैं। इकाई में अगले अंक को जोड़ते हुए संकलन की क्रिया सम्पन्न करते हैं।

उदाहरण - (1)

```
   3 8
+  2 7
------------
```

हल :

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\ 27 \\ \hline \end{array}$$

(1) (इकाई में इकाई जोड़ें). 8+7 = 15

सात के बायें (पूर्व) अंक पर एकाधिक चिह्न (बिन्दु) लगा देंगे। 5 को नीचे लिखेंगे।

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\ \dot{2}7 \\ \hline 5 \end{array}$$

(2) (दहाई में दहाई)

$3+\dot{2}=3+3=6$

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\dot{2}7 \\ \hline 65 \end{array}$$

उदाहरण 2.

$$\begin{array}{r} 9378 \\ +\ 2895 \\ \hline \end{array}$$

हल - सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण (एकाधिक चिह्न का प्रयोग)

$$\begin{array}{r} 9378 \\ +\ 2895 \\ \hline \end{array}$$

(1) इकाई में इकाई जोड़ें - 8 + 5 = 13

13 में प्राप्त हासिल (अतिरिक्त अंक) एक को 5 के पूर्व अंक (बायें अंक) 9 पर एकाधिक चिह्न (˙) के रूप में रख देंगे अर्थात् हासिल 1 आते ही पूर्व अंक का एकाधिक कर देंगे तथा 3 इकाई के नीचे उत्तर में लिखेंगे।

यथा

$$\begin{array}{r} 9\,3\,7\,8 \\ 2\,8\,\dot{9}\,5 \\ \hline 3 \end{array}$$

2. (दहाई में दहाई) :- $7+\dot{9}=7+10=17$

7 को दहाई के स्थान पर लिखेंगे और 17 के 1 के लिए पूर्व अंक 8 पर एकाधिक चिह्न लगा देंगे ।

$$\begin{array}{r} 9\,3\,7\,8 \\ +\ 2\,\dot{8}\,\dot{9}\,5 \\ \hline 7\,3 \end{array}$$

3. (सैकड़े में सैकड़ा) :- $3+\dot{8}=3+9=12$

8 के पूर्व अंक का एकाधिक कर उत्तर में सैकड़े के स्थान पर 2 लिख लेंगे ।

$$\begin{array}{r} 9\,3\,7\,8 \\ +\ \dot{2}\,\dot{8}\,\dot{9}\,5 \\ \hline 2\,7\,3 \end{array}$$

4. (हजार में हजार जोड़ें) :- $9+\dot{2}=9+3=12$

2 के पूर्व अंक 0 का एकाधिक ($\dot{0}$) करें और 2 को नीचे लिख लेंगे । तथा $\dot{0}$ = 1, दस हजार के स्थान पर उत्तर में प्राप्त होगा ।

<u>ध्यातव्य</u> :-12 को सीधे ही उत्तर में लिखा जा सकता है। साथ ही हम

जानते हैं कि संख्या में बायीं ओर शून्य रखने से कोई अन्तर नहीं आता (यह भी छात्र को समझाया जाए) ।

9378
+0$\dot{2}$8$\dot{9}$5
- - - -
12273

उदाहरण - (3)

2 8 5 6
+$\dot{3}$ 4 $\dot{6}$ 4
- - - - -
6 3 2 0

हल- प्रश्न में कितनी भी संख्याएं हों योग करते समय जैसे ही अतिरिक्त अंक 1 प्राप्त होता है पूर्व अंक (बायें अंक) पर एकाधिक चिह्न लगा देना चाहिए और इकाई लेकर आगे जोड़ करते हुए हल करना चाहिए। (देखिए और समझिए)

1.7 उत्तर की जांच की विधि

उत्तर की जांच के लिए संख्या का बीजांक निकालना सीखना होगा। किसी संख्या का बीजांक उस संख्या के सभी अंकों का जोड़ होता है । यदि यह जोड़ 9 से अधिक अर्थात् दो अंकों में आए तो इनको पुन: जोड़ा जाता है । जैसे 28 का बीजांक = 2+8 = 10 (दो अंक)

1+0 = 1

98 का बीजांक = 9+8 = 17

अब 1+7 = 8 बीजांक = 8

497 का बीजांक = 4+9+7= 20 बीजांक = 2

9992 का बीजांक = 9+9+9+2 = 29

अब 2+9 = 11

फिर 1+1 = 2

अर्थात् 9992 का बीजांक = 2

भारतीय दाशमिक प्रणाली होने के कारण किसी संख्या का बीजांक वह अंक है जो उस संख्या को नौ पर बांटने से शेष बचे । संख्या को 9 पर बांटने से शेष वही है जो उस संख्या के अंकों को जोड़कर (एक अंकीय संख्या) प्राप्त हो । ऐसी स्थिति में संख्या का बीजांक मालूम करने के लिए उसके अंकों या अंकों के जोड़ में से नौ हटाते जाएं ।

जैसे :- 28 में 8 को 9 बनाने के लिए दूसरे अंक 2 में से 1 को दे दें तो शेष 1 रह जाएगा जो उसका बीजांक है ।

947 का बीजांक मालूम करने के लिए 9 को छोड़ दिया जाए और 7 को 4 में से 2 देकर 9 बना दें तो 4-2=2 रह जाएगा जो उसका बीजांक है । उत्तर ठीक है अथवा नहीं इसकी जांच के लिए प्रत्येक संख्या का अलग-अलग बीजांक निकाल कर उन्हें जोड़ कर पुन: बीजांक निकालें । यह बीजांक यदि उत्तर संख्या के बीजांक के बराबर नहीं है तो उत्तर निश्चित रूप से गलत है । यदि ये दोनों बीजांक बराबर हैं तो सामान्यत: समझना चाहिए कि उत्तर ठीक है ।

संख्या	बीजांक	
क	अ	
+ ख	+ इ	अ+इ+उ का बीजांक
+ ग	+ उ	ओ = घ होना चाहिए तभी उत्तर ठीक है
----	----	
घ	ओ	
----	----	

यह जांच की प्रक्रिया सभी गणितीय एवं बीजगणितीय क्रियाओं (जोड़, घटाव, गुणा, भाग, वर्ग, घन, वर्गमूल व घनमूल इत्यादि) में लागू होती है।

अभ्यासमाला

एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र का प्रयोग कर योगफल ज्ञात कीजिए -

(1)	(2)	(3)	(4)
27	187	384	763
+ 34	+ 235	+ 169	+ 282
----------	----------	----------	----------

(5) 459 + 641 = ----------

(6) 894 + 306 = ----------

(7) 888 + 112 = ----------

(8) 999 + 234 = ----------

(9) 3478 + 1780 + 4897 = ----------

(10) 7873 + 6854 + 3075 = ----------

(11) 8470 + 3289 + 5401 = ----------

उत्तरमाला

(1) 61	(2) 422	(3) 553	(4) 1045
(5) 1100	(6) 1200	(7) 1000	(8) 1233
(9) 10155	(10) 17802	(11) 17160	

अध्याय 2

व्यवकलन

2.1 एक अंक की संख्याओं का व्यवकलन एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र की सहायता से प्रारम्भ में ही सिखाया जा चुका है। इससे आगे सिखाने से पूर्व निम्नांकित तैयारी करा लें।

2.1.1 बड़ी और छोटी संख्या की पहचान- इसके लिए बिना क्रम की संख्याओं को बढ़ते हुए तथा घटते हुए क्रम में लिखने का अभ्यास कराएँ।

सबसे पहले एक अंक की संख्याओं से अच्छा अभ्यास करा लें जैसे 6,3,4,8,7 को बढ़ते क्रम में लिखवाना और फिर घटते क्रम में लिखवाना। फिर 1 से 20 तक की संख्याओं का, फिर 20 से 40 तक, फिर 40 से 60 तक, इसी तरह 60-80 और 80-100 की संख्याओं से अभ्यास कराएँ। फिर 1-100 के बीच की संख्याओं में से कुछ लेकर बढ़ते और घटते क्रम में सजाने का अभ्यास कराया जाए ।

2.1.2 एक न्यूनेन पूर्वेण सूत्र और उल्टी गिनती से जो अभ्यास संकलन के अध्याय में 1 से 9 तक की संख्याओं में व्यवकलन का कराया था उसका पुनरभ्यास कराया जाय।

2.2 पूरक संख्या - परम मित्र का अभ्यास अच्छा हो चुका है।

किसी संख्या में परम मित्र जोड़ने पर 10 होता है। जैसे 6 का परम मित्र 4 है और 6+4 = 10 होता है।

हम कहेंगे कि 10 के लिए 6 का पूरक 4 है क्योंकि 6 में 4 जोड़ने पर 10 पूरा हो जाता है। 4 छः का परम मित्र भी है ।

इस कल्पना को आगे बढ़ाते हुए 20 में 18 का पूरक 2 है, ऐसा कहा जाएगा क्योंकि 18 में 2 जोड़ने पर 20 पूरा हो जाता है।

100 के लिए पूरक निकालने हेतु हम दो बार में करें तो आसानी होगी। जैसे 100 में 87 का पूरक निकालना हो तो पहले 90 में 87 का पूरक निकलें जो 3 है, फिर 100 में 90 का पूरक निकालें जो 10 है। इन दोनों को जोड़कर 10+3 = 13, यह संख्या 100 के लिए 87 का पूरक है। अभ्यास होने पर 87 और 3=90, 90 और 10=100, ऐसा किया जा सकता है। इस प्रकार के खूब अभ्यास कराएँ।

500 के लिए 67 का पूरक तीन बार में मिलेगा -

67 और 3, 70

70 और 30, 100

100 और 400, 500

अत: 500 के लिए 67 का पूरक = 400+30+3 = 433

2.3 निखिलं नवतश्चरमं दशत: यह श्रद्धेय स्वामी जी का दूसरा सूत्र है जिसका अर्थ है "सबको 9 में से, अन्तिम को 10 में से"। इसका उपयोग पूरक ज्ञात करने में मुख्यत: है। 100 के लिए 87 का पूरक ज्ञात करना हो तो प्रत्येक अंक 9 में से घटाना है परन्तु चरम अंक अर्थात् सबसे दाहिने का अंक 10 में से घटाना है। यहाँ चरम अंक 7 को 10 में से और बचे अंक 8 को 9 में से घटाने पर 13 मिला ।

2.3.1 शिशु द्वितीय वर्ष एवं कक्षा प्रथम में दो अंकों की प्रक्रिया सिखाई जाती है अब उसे किसी संख्या में शून्यांत संख्या घटाने का अभ्यास कराएं। जैसे 27-10, 47-20, 77-50 इत्यादि जिससे उसे समझ आ जाय कि किसी अंक में शून्य कम करने से वही अंक रहता है। केवल दहाई के अंकों पर क्रिया करनी होती है। जैसे 27-10 में इकाई के सात में से शून्य कम करने पर सात ही रहता है। अब 2 में से 1 कम करें, उत्तर 17 आयेगा। यह अभ्यास लिखित व मौखिक दोनों प्रकार से हो।

2.3.2 शिशु को यह भी सिखाना चाहिए कि यदि व्यवकलन में दोनों संख्याओं में कोई समान अंक जोड़ें अथवा घटाएं तो उत्तर में (अंतर में) कोई परिवर्तन नहीं होगा। यह कंकड़, चित्र आदि के प्रयोग से समझा सकते हैं।

जैसे 7 में से 3 घटाना है। यदि संख्याओं में एक जोड़ दें तो ये क्रमश: 8 व 4 हो जायेंगी अत:

7 - 3 = 8 - 4 (7 को भी एक बढ़ाया 3 को भी एक बढ़ाया)

समान अंक घटाने पर यही स्थिति रहती है 7-3=6-2 अर्थात् 7 को 1 कम किया तो 3 को भी 1 कम करेंगे ।

2.3.3 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण द्वारा व्यवकलन -

(ऊपर की संख्या में अंक बड़े तथा नीचे की संख्या में अंक छोटे हों)

584
- 231

हल - 584 सूत्र - एकन्यूनेन पूर्वेण का प्रयोग कर क्रमश:
- 231 4 में से 1 कम = 3
------------- 8 में से 3 कम = 5
353 5 में से 2 कम = 3

(उत्तर बायें से दायें या दायें से बाये लिखा जा सकता है।)

2.4 सूत्र - एकाधिकेन पूर्वेण :- (एकाधिक चिह्न (˙) का प्रयोग) तथा परम मित्र की सहायता से हासिल वाले प्रश्न सरलतापूर्वक किए जा सकते हैं । इसमें परममित्र अथवा पूरक अंक की सहायता ली जाए ।

उदाहरण (1)

15
- 08

हल :- (इकाई में से इकाई) - ऊपर 5 छोटा है नीचे 8 बड़ा है। 5 में से 8 नहीं घटता, 8 का परम मित्र 2 ऊपर के 5 में जोड़ें, प्राप्त हुआ 7 नीचे उत्तर में लिखें । 8 के पूर्व (बायें) अंक का एकाधिक करें।

15
- $\dot{0}$8

7

(2) (दहाई में से दहाई) -

1 - $\dot{0}$ = 1 - 1 = 0

15
- $\dot{0}$8

07

उदाहरण (2)

5 3 0 1
- 2 9 4 8

हल - सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण (एकाधिक चिह्न ($\dot{}$) तथा परम मित्र की सहायता से) :-

$$\begin{array}{r} 5\ 3\ 0\ 1 \\ +\ \dot{2}\ \dot{9}\ \dot{4}\ 8 \\ \hline 2\ 3\ 5\ 3 \end{array}$$

विलोकनम् (ध्यान से देखना) से यह स्पष्ट हो जाता है कि इकाई में ऊपर का अंक नीचे के अंक से बड़ा है या छोटा है। यदि ऊपर का अंक बड़ा है तब घटाना सरल है। किन्तु नीचे का अंक बड़ा है तब नीचे के अंक का परममित्र ऊपर के अंक में जोड़ें तथा पूर्व अंक (बायें अंक) का एकाधिक करने से सरलता हो जाती है।

उदाहरण (3) हल कीजिए तथा उत्तर की जाँच भी कीजिए।

7 4 6
-3 8 9

हल :- जांच की विधि के लिए देखें 1.7

(1) ऊपर 6 छोटा है, नीचे 9 बड़ा है।

9 के परम मित्र 1 को 6 में जोड़ें प्राप्त हुआ 7.

9 के पूर्व अंक 8 का एकाधिक करें $\dot{8}$

$$\begin{array}{r} 7\ 4\ 6 \\ -\ 3\ \dot{8}\ 9 \\ \hline 7 \end{array}$$

(2) (दहाई में से दहाई) - ऊपर 4 छोटा है नीचे $\dot{8}$ = 9 बड़ा है अतः 9 के परममित्र 1 को 4 में जोड़ कर 8 के पूर्व अंक 3 का एकाधिक ($\dot{3}$) करें ।

$$\begin{array}{r} 7\ 4\ 6 \\ -\ \dot{3}\ \dot{8}\ 9 \\ \hline 5\ 7 \end{array}$$

(3) सैकड़े में से सैकड़ा -

$7 - \dot{3} = 7 - 4 = 3$

$$\begin{array}{r} 7\ 4\ 6 \\ \dot{3}\ \dot{8}\ 9 \\ \hline 3\ 5\ 7 \end{array}$$

उत्तर की जाँच - (9 के शेष द्वारा, इसे ही बीजांक कहते हैं)

7 4 6	8	उत्तर का बीजांक
$\dot{3}\ \dot{8}$ 9	2	+ नीचे की संख्या का बीजांक
----		= ऊपर की संख्या का बीजांक
3 5 7	6	6 + 2 = 8
		8 = 8
		उत्तर सही।

2.5 नीचे की संख्या को शून्यांत बनाकर - (निखिलम् सूत्र)

इस तरीके से घटाना सरल हो जाता है।

उदाहरण (1)

$$\begin{array}{r} 6\ 5 \\ -\ 4\ 8 \\ \hline \end{array}$$

हल - 65
- 48

विलोकनम् से स्पष्ट है कि ऊपर तथा नीचे की दोनों संख्याओं में दो-दो जोड़ने पर नीचे की संख्या 48, शून्यांत हो जायेगी तथा घटाना सरल हो जायेगा। (नीचे की संख्या को शून्यांत बनाए)

65 + 2   67
- 48 + 2   - 50

17

इस तरह के प्रश्न बनाकर अभ्यास करायें।

अभ्यासमाला

सूत्र - एकाधिकेन पूर्वेण तथा परम मित्र की सहायता से हल कीजिए-

(1)	(2)	(3)
31	42	312
- 28	- 15	- 176
-------------	-----------	-----------

(4)	(5)	(6)
403	5231	6047
- 184	- 1789	- 1852
-------------	-----------	-------------

(7) 8817
- 3454

उत्तरमाला

(1) 03   (2) 27   (3) 136   (4) 219
(5) 3442   (6) 4195   (7) 5363

अध्याय 3

ऋणांक (विनकुलम)

3.1 ऋणांकों के प्रयोग से संख्या लेखन वैदिक गणित की अनूठी विशेषता है। इससे गणित के प्रश्नों को हल करने में जहां सरलता होती है, वहीं बड़े-बड़े पहाड़े द्रुतगति से लिखे जा सकते हैं। इस पद्धति का व्यापक उपयोग है।

0 से 9 तक के अंक होते हैं । -2 संख्या है जिसे अंक के रूप में प्रयोग में लाया जा सकता है। उस स्थिति में हम $\bar{2}$ ऐसा लिखेंगे। जैसे $1\bar{2}$ में इकाई के स्थान में $\bar{2}$ और दहाई के स्थान पर 1 है अतः 1 का स्थानीय मान 10 और $\bar{2}$ का स्थानीय मान -2 होगा।

अतः $1\bar{2} = 10\text{-}2 = 8$ होगा । इसी तरह $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$ का अंकों के रूप में ऋणात्मक संख्या लेखन में किया जा सकता है। ध्यान देने की बात है कि $\bar{0}$ का स्थानीय मान - 0 होगा जो 0 के बराबर है, अतः $\bar{0} = 0$

ऊपर के उदाहरण में $\bar{2}$ को "ऋणांक 2" पढ़ा जायेगा। अंग्रेजी में इसे *vinculum* 2 कहा जाता है। अनेक पुस्तकों में हिन्दी में भी विनकुलम 2 ऐसा प्रयोग है।

कुछ उदाहरण नीचे लिखे जा रहे हैं -

$9 = 1\bar{1}$ [क्योंकि $9 = 10\text{-}1 = 1\bar{1}$]

$18 = 2\bar{2}$ [क्योंकि $18 = 20\text{-}2 = 2\bar{2}$]

$138 = 14\bar{2}$ [क्योंकि [$138 = 140 - 2 = 14\bar{2}$]

$192 = 2\bar{1}2$ [इसमें केवल 9 को ऋणांक में लिखा गया है जो $1\bar{1}$ होगा । सैकड़े के स्थान पर 1 पहले से है, यह 1 मिलकर 2 हुआ।]

3.2 अन्तिम उदाहरण से ऋणांक ज्ञात करने के वैदिक सूत्र का पता चलता है । इसकी दो पद्धतियां हैं -

(क) पहली पद्धति - जिस अंक के लिए ऋणांक लिखना हो उसका परम मित्र निकालें। यहां 9 का परम मित्र 1 है जिस पर रेखा लगाकर $\bar{1}$

बनाया । फिर एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से 9 के बायें अंक 1 को एकाधिक कर 2 किया और इस प्रकार $2\bar{1}2$ प्राप्त हुआ।

(ख) दूसरी पद्धति - जिस अंक के लिए ऋणांक लिखना हो उसके दाहिने अंकों पर विचार न कर उसी अंक को चरमांक माने। निखिलं नवत: चरमम् दशत: और एकाधिकेन पूर्वेण सूत्रों का साथ-साथ प्रयोग करें। चरमं दशत: के अनुसार 9 को 10 में से घटाने पर 1 आया जिसे ऋण कर $\bar{1}$ प्राप्त किया। अब और अंकों के लिए ऋणांक नही निकालना। अत: निखिलं सूत्र का काम पूरा हुआ। एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से पहले के अंक 1 को एकाधिक कर 2 बनाया और $2\bar{1}2$ प्राप्त किया।

इसका एक और उदाहरण देखें। निम्नांकित संख्या में 5 से बड़े अंकों के लिए ऋणांक बनाते हुए संख्या लिखनी है।

$1582 = 2\bar{4}\bar{2}2$

केवल 8 के लिए ऋणांक लिखने पर एकाधिकेन सूत्र से 5 का 6 बन जायेगा जो अभीष्ट नहीं है। अत: 58 के लिए ऋणांक लिखना है। 58 के बाद के इकाई स्थान के 2 को यथावत् लिख दें। 58 का चरमांक 8 है जिसे निखिलं सूत्र के अनुसार 10 में से घटा कर 2 और 5 को 9 में से घटा कर 4 प्राप्त किया। एकाधिकेन सूत्र से 58 के बाईं ओर के अंक 1 को 2 बनाया । इस प्रकार $2\bar{4}\bar{2}2$ प्राप्त हुआ।

अब हम 6, 7, 8, 9 इन अंकों को छोटे अंकों में अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5 तक में बदलने का अभ्यास करेंगे।

सूत्र (1) निखिलम् नवत: चरमम् दशत:

अर्थात्- सभी अंकों को नौ में से परन्तु चरम अंक को दस में से घटाना है ।

(2) सूत्र - एकाधिकेन पूर्वेण

अर्थ - पूर्व अंक अर्थात् बायें अंक का एकाधिक के द्वारा ।

उदाहरण (1) 29 को ऋणांक पद्धति से लिखें ।

हल - (1) 9 चरम अंक है 10 में से घटा कर प्राप्त अंक पर रेखा लगा देंगे अर्थात् $\bar{1}$ प्राप्त हुआ ।

(2) 2 का एकाधिक 3

(3) अर्थात् 29 = 31

उदाहरण (2) - ऋणांक का प्रयोग कर संख्या 1783 में 7, 8 को बदलिये ।

हल -(1) इकाई की ओर से संख्या का विलोकनम् करें। 5 से बड़े अंकों को परिवर्तित करना है। इकाई में 3 है इसे परिवर्तित नहीं करना है। 3 यथावत् रहेगा।

(2) दहाई पर 8 है इसे बदलना है । जहां से बदलने की प्रक्रिया आरंभ करते हैं वही चरम अंक होता है ।

(3) सूत्र चरमम् दशत: से 10-8 = 2, प्राप्त 2 पर रेखा (जिसे शिरोरेखा भी कहते हैं) लगाने पर $\bar{2}$

(4) निखिलम् नवत: से 9-7=2 , इस 2 पर रेखा लगाने पर $\bar{2}$

(5) 7 का बायां अंक (पूर्व अंक) 1 है इसका एकाधिक कर प्रक्रिया समाप्त करेंगे।

1 का एकाधिक 2.

(6) अर्थात् 1 7 8 3 = 2 $\bar{2}$ $\bar{2}$ 3

उदाहरण (3) - ऋणांकों का प्रयोग कर 3872961 में 5 से बड़े अंकों को परिवर्तित कीजिए।

हल - संख्या 3 8 7 2 9 6 1 = 4 $\bar{1}$ $\bar{3}$ 3 0 $\bar{4}$ 1

इकाई की ओर से विलोकनम् करें -

(क) हम यह देखें कि किस अंक को बदलना है किसे नहीं ?

(ख) चरम अंक कौन सा होगा तथा शेष निखिल अंक कौन से होंगे ?

(ग) एकाधिक किस अंक को करेंगे ?

उक्त तीन बिन्दु क, ख, ग को ध्यान में रख कर सीधे उत्तर लिखा जा सकता है।

प्रक्रिया (1) इकाई में एक है, यथावत ।

(2) दहाई में 6 है यहां से बदलने की प्रक्रिया आरम्भ करें। चरमम् दशत: से 4

(3) सैकड़ा 9 है इसे बदलना है यह चरम अंक का बायां अंक है अत: निखिलम् नवत: से 0

(4) हजार के स्थान पर 2 है जिसे बदलना नही है प्रक्रिया 2 का

एकाधिक 3 कर के समाप्त करें ।

(5) संख्या में अगला अंक 7 है। इसे बदलना है प्रक्रिया पुन: प्रारम्भ करें 7 चरम अंक, 8 निखिल अंक है। निखिलम् सूत्र से $\bar{1}\bar{3}$

(6) 8 के पूर्व अंक (बायें अंक) 3 का एकाधिक 4 करके प्रक्रिया समाप्त । उत्तर $4\ \bar{1}\ \bar{3}\ 3\ 0\ \bar{4}$

उदाहरण (4) 6 8 9 7 को ऋणांकों का प्रयोग कर 5 से छोटे अंकों में बदलिये ।

हल - (1) 7 चरम अंक है, तथा उसके बायें 9, 8, 6 निखिल अंक हैं। सभी को परिवर्तित करना है।

(2) सूत्र निखिलम् नवत: चरमम् दशत: से

$$\begin{matrix} 6 & 8 & 9 & 7 \\ \bar{3} & \bar{1} & 0 & \bar{3} \end{matrix}$$

(3) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण से 6 के बायें शून्य का एकाधिक एक कर प्रक्रिया समाप्त करेंगे।

अर्थात् $0\,6\,8\,9\,7 = 1\,\bar{3}\,\bar{1}\,0\,\bar{3}$

अभ्यासमाला

निम्नलिखित संख्याओं को ऋणांकों का प्रयोग कर इस प्रकार लिखें कि 5 से बड़े अंक न आएँ -

(1) 18 (2) 27 (3) 178 (4) 698

(5) 872 (6) 37892 (7) 127298 (8) 7896

उत्तरमाला

(1) $2\bar{2}$ (2) $3\bar{3}$ (3) $2\bar{2}\bar{2}$

(4) $1\bar{3}0\bar{2}$ (5) $1\bar{1}\bar{3}2$ (6) $4\bar{2}\bar{1}\bar{1}2$

(7) $13\bar{3}30\bar{2}$ (8) $1\bar{2}\bar{1}0\bar{4}$

3.3 ऋणांकों के स्थान पर धनांकों का प्रयोग कर संख्या को लिखना ।

उदाहरण (1) 3 2 धनांक संख्या में बदलिए।

हल - सूत्र (1) निखिलम् नवतः चरमम् दशतः

(2) एकन्यूनेन पूर्वेण

उक्त सूत्रों का प्रयोग करना है। प्रक्रिया विनकुलम् के ठीक विपरीत है।

$\bar{2}$ बने चरमम् दशतः से 10-2= 8

3 का एक न्यून 2

अर्थात् 3 $\bar{2}$ = 28

उदाहरण (2) 4 $\bar{3}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$ 5 के ऋणांकों को बदलिए।

हल 4 $\bar{3}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$ 5 = 3 6 8 8 5

5 यथावत्

$\bar{2}$ चरमम् दशतः से 10-2 = 8

$\bar{1}$ निखिलम् नवतः से 9-1 = 8

$\bar{3}$ निखिलम् नवतः से 9-3 = 6

4 का एकन्यून = 3

उदाहरण (3) 2 4 $\bar{3}$ $\bar{5}$ 1 $\bar{4}$ में ऋणांकों को बदलिये।

हल - सूत्र निखिलम् नवतः चरमम् दशतः तथा एकन्यूनेन पूर्वेण से

2 4 $\bar{3}$ $\bar{5}$ 1 $\bar{4}$ = 2 3 6 5 0 6

(देखिये और समझिए)

(उत्तर बायें से दायें या दाये से बायें लिखा जा सकता है)

अभ्यासमाला

निम्नलिखित संख्याओं को ऋणांक हटाकर लिखें।

(1) 1 $\bar{1}$ (2) 2 $\bar{3}$ (3) 1 $\bar{2}$ $\bar{2}$ (4) 2 $\bar{3}$ $\bar{4}$

(5) 2 $\bar{4}$ 2 (6) 3 2 1 (7) 2 $\bar{4}$ $\bar{3}$ $\bar{2}$ (8) 4 $\bar{3}$ 0 $\bar{2}$

(9) 4 3 8 (10) 2 $\bar{7}$ 2 (11) 4 $\bar{5}$ 0 $\bar{4}$ 9

उत्तरमाला

(1) 09 (2) 17 (3) 078 (4) 166 (5) 158

(6) 281 (7) 1568 (8) 3698 (9) 422 (10) 132

(11) 34951

अध्याय 4

मिश्रित गणनाएं

4.1 ऋणांकों के प्रयोग का ज्ञान हो जाने पर मिश्रित गणनाएं सरलता से की जा सकती हैं ।

उदाहरण (1) 47 - 32 + 53 - 24 का हल कीजिए ।

हल

$$
\begin{array}{rr}
 & 4\ 7 \\
+ & \bar{3}\ \bar{2} \\
 & 5\ 3 \\
 & \bar{2}\ \bar{4} \\
\hline
 & 4\ 4
\end{array}
$$

सूत्र - परावर्त्य एवं एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से ।

(1) (इकाई से इकाई) $7+\bar{2}=5$

अब $5+3=8$ इस 8 में $8+\bar{4}=4$

(2) (दहाई से दहाई) $4+\bar{3}=1$

$1+5=6$ इस 6 में $\bar{2}$ में जोड़ना है

अतः $6+\bar{2}=4$

उदाहरण (2) 482 - 197 + 731 - 289

हल -

$$
\begin{array}{rr}
 & 4\ 8\ 2 \\
+ & \bar{1}\ \bar{9}\ \bar{7} \\
 & \dot{0}\ 7\ 3\ 1 \\
+ & \bar{2}\ \underset{\cdot}{\bar{8}}\ \bar{9} \\
\hline
 & 1\ \bar{2}\ \bar{7}\ \bar{3}
\end{array}
$$

सूत्र- परावर्त्य एवं एकाधिकेन पूर्वेण

(1) (इकाई में इकाई) $2+\bar{7}=\bar{5}$ इसमें अगला अंक जोड़ने पर $\bar{5}+1=\bar{4}$ आगे $\bar{4}+\bar{9}=\bar{1}\bar{3}$, अतिरिक्त अंक । प्राप्त हुआ है $\bar{9}$ के पूर्वेण अंक बायें अंक पर बिन्दु के स्थान पर नीचे (.) चिह्न रखेंगे । $\bar{3}$ नीचे लिखें । (.) को एकन्यून चिह्न कहेंगे । यह लगाने पर अंक का मान एक कम होता है ।

(2) (दहाई में दहाई) $8+9=1$ इसमें 3 जोड़ने पर $1+3=2$ 2 में हमें $\underset{\cdot}{\bar{8}}$ जोड़ना है $2+ . +\bar{8}=2+\bar{1}+\ddot{8}=7$

(3) (सैकड़ा में सैकड़ा) $4+\dot{1}=3$ आगे $3+7=10$, सात के बायें बिन्दु का चिह्न रखें (एकाधिक चिह्न लगाएँ) $0+2=2$ प्राप्त करें।

(4) हजार के स्थान पर हमें $\dot{0}=1$ प्राप्त हुआ है।

(5) 1 2 7 3 उत्तर को ऋणांक हटा कर लिखने पर 0 7 2 7 = 727

अभ्यासमाला

ऋणांकों का (विनकुलम का) तथा परावर्त्य एवं एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र का प्रयोग कर हल कीजिए -

(1) 71 − 43

(2) 84 − 27

(3) 97 − 48

(4) 86 − 38 − 16 + 31

(5) 43 − 28 − 17 + 85

(6) 64 − 44 − 29 + 37

(7) 438 − 143 − 237 + 108

(8) 841 − 522 − 448 + 257

(9) 744 − 512 − 635 + 410

उत्तरमाला

(1) 28	(2) 57	(3) 49
(4) 63	(5) 83	(6) 28
(7) 166	(8) 128	(9) 7

अध्याय 5

पहाड़ा

5.1 वैदिक गणित में पहाड़ा लिखने का बड़ा ही सरल एवं रोचक तरीका है। ऋणांक (विनकुलम) का प्रयोग वैदिक गणित की विशेषता है । इसी के प्रयोग से बड़ी-बड़ी संख्याओं के पहाड़े सरलता से एवं द्रुतगति से लिखे जा सकते हैं।

9 के पहाड़े से सीखना आरम्भ करते है।

$1\bar{1}$ हमारा प्रचालक है।

इसकी सहायता से पहाड़ा लिखा जायेगा ।

	$1\bar{1}$	प्रचालक
1	09	विधि
2	18	प्रचालक
3	27	लिखकर
4	36	उसके नीचे
5	45	रेखा खींच दें।
6	54	जिसका पहाड़ा
7	63	लिखना है उसे
8	72	रेखा के नीचे
9	81	लिखें। इकाई $\bar{1}$
10	90	के कारण इकाई

9 में से एक-एक कम करना और दहाई में एक-एक जोड़ना है। इससे पहाड़ा हो जायेगा।

19 का पहाड़ा लिखें ।

$19 = 2\bar{1}$

	$2\bar{1}$	प्रचालक
1	19	(1) इकाई में से
2	38	$\bar{1}$ के कारण
3	57	एक-एक घटाना है।
4	76	(2) दहाई में 2
5	95	के कारण दो-दो
6	114	जोड़ते जाना है।
7	133	(3) दसवें, बीसवें
8	152	स्थान पर पहाड़े
9	171	की जाँच
10	190	विलोकनम् से हो

जाती है।

27 का पहाड़ा लिखिए ।

$27 = 3\bar{3}$

$\quad\quad\; 3\bar{3}$

1	27
2	54
3	81
4	$11\bar{2}$ =108
5	135
6	162
7	$19\bar{1}$=189
8	216
9	243
10	270

विधि : 27 के पहाड़े

27 के पहाड़े में प्रचालन $3\bar{3}$ अर्थात् इकाई में 3 कम करते जाएं एवं दहाई में 3 जोड़ते जाएं । ध्यातव्य 27x3=81 के उपरांत 81 को इकाई में 3 घटाएं तो $\bar{2}$ और दहाई में 8 + 3 = 11 ऐसे 27x4 = $11\bar{2}$ जो 108 है । ऐसे ही 6 तक के पहाड़े के बाद है ।

89 का पहाड़ा लिखिए ।

89 = $1\,\bar{1}\,\bar{1}$ प्रचालक

$\quad\quad 1\,\bar{1}\,\bar{1}$

1	089
2	178
3	267
4	356
5	445
6	534
7	623
8	712
9	801
10	$9\bar{1}0$= 890

विधि - 89 का पहाड़ा सरल है। 89 का प्रचालक $1\,\bar{1}\,\bar{1}$ है। प्रचालक लिखकर नीचे रेखा खीचें उसके बाद वह संख्या लिखें जिसका कि हमें पहाड़ा लिखना है। 89 के इकाई में से एक-एक कम करना है। दहाई में भी एक कम करना है। नवें स्थान पर 0 में से 1 नहीं घटता 1 का परममित्र 9 शून्य में जोड़कर, 9 के सामने - (ऋण) चिह्न लगा दिया । दिया। सैकडें में एक-एक जोड़ ले जाना है। दसवें स्थान पर 9 के सामने - (ऋण) है वहां सैकड़ें के स्थान पर जोड़ते समय जो संख्या आये उसका एक कम करके लिखना है।

284 का पहाड़ा लिखिए।

284 का प्रचालक = $3\,\bar{2}\,4$

$3\bar{2}4$ प्रचालक

विधि -284 का पहाड़ा लिखना है।

1	$3\bar{2}4$ =	284
2		568
3	$8\dot{4}2$ =	852
4		1136
5	$14\dot{1}0$ =	1420
6		1704
7	$20\bar{2}8$ =	1988
8	$22\dot{6}2$ =	2272
9		2556
10	$28\dot{3}0$ =	2840

284 का प्रचालक $3\bar{2}4$ है। इकाई में 4 जोड़ते चलना है। जहाँ हासिल आये उस अंक के बाएं अंक पर बिन्दु (˙) लगा देना है। दहाई में 2 घटाते चलना है। जिन अंकों के ऊपर बिन्दु है वहाँ 1 अधिक करके लिखना है। दहाई मे छठे स्थान पर शून्य में से 2 नहीं घटता, 2 का ऋण -चिह्न लगाया है। सैकड़े में 3 जोड़ते चलना है जहाँ ऋण चिह्न है वहां एक कम करके लिखना है।

43 का पहाड़ा लिखिए

43 विधि

1		43
2		86
3		129
4	$\dot{6}2$ =	172
5		215
6		258
7	$2\dot{9}1$ =	301
8		344
9		387
10	$4\dot{2}0$ =	430

43 का प्रचालक 43 ही होगा । 5 तक के अंकों को बदलना उपयुक्त नहीं है। इकाई में 3 जोड़ते चलना है। जहाँ हासिल आये उस अंक के बाएँ अंक पर बिन्दु (˙) लगा देना है। दहाई में 4 जोड़ते चलना है। जहाँ बिन्दु हो वहाँ एक अधिक करके लिख देना है।

थोड़े से अभ्यास से किसी भी संख्या का पहाड़ा सरलता से लिखा जा सकता है।

अभ्यासमाला

ऋणांक (विनकुलम) का प्रयोग कर पहाड़े लिखिए।

(1) 39 (2) 47 (3) 79 (4) 32

(5) 179 (6) 197

अध्याय 6

गुणा

6.1 वैदिक गणित में गुणा करने की बहुत ही रोचक विधियां हैं। वैदिक गणित के सूत्रों के प्रयोग से अनेक प्रश्नों को मौखिक हल किया जा सकता है। साथ ही सीधे एक पंक्ति में उत्तर लिखा जा सकता है।

विधियाँ -

(1) प्रचलित विधि

(2) विलोकनम्

(3) एकन्यूनेन पूर्वेण

(4) एकाधिकेन पूर्वेण, अन्त्ययोर्दशकेऽपि

(5) निखिलम् - आधार, उपाधार

(6) ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

(1) प्रचलित विधि हम जानते ही हैं। अत: उसकी चर्चा यहां करने की आवश्यकता नहीं है।

6.2 विलोकनम् :- यह बहुत महत्वपूर्ण सूत्र है। अनेक प्रश्नों का हल मात्र देखकर ही बतलाया जा सकता है। जैसे :-

* किसी संख्या में 10, 100, 1000 ----- आदि का गुणा करना हो तो मात्र संख्या में दायीं ओर उतने ही शून्य रख दें जितने 10 या 100 इत्यादि में हैं ।

$37 \times 10 = 370$, $454 \times 100 = 45400$ आदि

* किसी संख्या में 5 का गुणा करना है तब संख्या के दायें एक शून्य रखकर उसका आधा कर दें।

$$86 \times 5 = \frac{860}{2} = 430$$

* 50 का गुणा करना है। दो शून्य रख कर आधा करने से सवाल बनेगा । जैसे $248 \times 50 = \frac{24800}{2} = 12400$

वैदिक गणित सूत्रों से प्रश्न हल करने का सबसे बड़ा लाभ यही है

कि प्रश्न को देख कर, उसको तत्काल कैसे हल करें यह दृष्टि विकसित होती है।

6.3 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण

किसी एक संख्या के सभी अंक 9 हों तब इस सूत्र के प्रयोग से प्रश्न को सरलता से हल कर सीधे एक पंक्ति में उत्तर लिखा जा सकता है।

इसमें तीन स्थितियां हैं -

6.3.1 स्थिति (1) गुण्य और गुणक में अंकों की संख्या समान हो।

उदाहरण (1) 54 x 99

हल 54 x 99 = 53/46

(*) सूत्र - एकन्यूनेन पूर्वेण से -

54 का एकन्यून 53

(*) सूत्र निखिलम् नवत: चरमम् दशत: से -

10 - 4 = 6

9 - 5 = 4

इस प्रकार 53/46 उत्तर प्राप्त हुआ।

इस तरह के प्रश्न में दो सूत्रों के प्रयोग के स्थान पर एक ही सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है ।

पहली विधि (एकन्यूनेन पूर्वेण)	54 x 99	पहले वाम पक्ष 54-1 = 53 दाहिना पक्ष 9-5, 9-3 अर्थात् 53 की पूरक संख्या 99 के सापेक्ष = 46
दूसरी विधि (निखिलम् सूत्र से)	54 x 99 - - / 46 53/46	पहले दाहिनी ओर निखिलम् से 46 बाद में बायीं ओर 99 के सापेक्ष 46 की पूरक संख्या = 53

उदाहरण (2) 2 1 4 8 x 9 9 9 9

हल - 2147 / 7852

(*) सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण से -

2148 का एकन्यून 2147

(*) सूत्र निखिलम् नवत: चरमम् दशत: से 2, 1 एवं 4 को 9 में से

तथा चरम अंक 8 को 10 में से घटाने पर प्राप्त हुआ 7852

उत्तर 21477852

6.3.2 स्थिति (2) यदि 9 अधिक हों तब -

उदाहरण (1) 37 x 999

हल - 37 x 999

विलोकनम् से स्पष्ट है कि एक नौ अधिक है। अत: 37 के बायें एक शून्य रख कर अंकों की संख्या दोनों ओर बराबर हो गई। अब सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण तथा निखिलम् नवत: चरमम् दशत: से सीधे उत्तर लिखा जा सकता है।

037x999

= 036 963

उत्तर : 036963

(बायें शून्य लिखना आवश्यक नहीं । यह आरम्भ में समझाने के लिये लिखा जा सकता है।)

6.3.3 स्थिति (3) यदि 9 के अंक कम हों तब -

उदाहरण (1) 13 x 9

हल -

12 / 9

−1 2 = 117

सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण से 13 का एकन्यून 12 हुआ । 9 को 12 के बाद लिख लिया प्राप्त 129 में से बायीं ओर की संख्या घटा दें ।

129-12 = 117

उत्तर 117

उदाहरण (2) 438 x 99

हल

438 x 99

- - - -

437 99

−4 37

- - - -

433 62

सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण से 438 का एकन्यून 437 किया 437 के बाद 99 यथावत् लिख दें। प्राप्त हुआ 43799 इसमें से 437 घटा दें। अर्थात् = 43362

सरल से कठिन की ओर सूत्र को ध्यान में रखकर अभ्यास करायें। प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय स्थितियों पर अनेक प्रश्न स्वयं बना कर क्रमशः अभ्यास करायें।

अभ्यासमाला

(1) 57 x 99
(2) 4378 x 9999
(3) 17897 x 99999
(4) 999 x 999
(5) 87 x 999
(6) 345 x 999999
(7) 48 x 9
(8) 9457 x 999
(9) 99999 x 87541

उत्तरमाला

(1) 5643
(2) 43775622
(3) 1789682103
(4) 998001
(5) 86913
(6) 344999655
(7) 432
(8) 9447543
(9) 8754012459

6.4 सूत्र - एकाधिकेन पूर्वेण तथा अन्त्ययोर्दशकेऽपि

गुणा करने में इस सूत्र का प्रयोग तब करते हैं जब गुणक और गुण्य की इकाइयां परम मित्र हों अर्थात् इकाइयों का जोड़ दस हो तथा दहाई आदि अन्य अंक समान हों । इस विधि का आगे विस्तार इस प्रकार है कि गुणक और गुण्य के दायें समूहों का योग आधार संख्या 10, 100, 1000 ---- आदि हो तथा शेष बायां समूह समान हो। यह तथ्य उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगा । इकाई में 5 हो तो ऐसी संख्या का वर्ग भी इस सूत्र से निकालते हैं ।

उदाहरण - **(1)** 12 x 18

हल - यहाँ (2+8=10) 12 x 18 = 2/16 = 216

सूत्र - एकाधिकेन पूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि -

(1) उत्तर का बायां भाग = (दहाई का एकाधिक x दहाई)
= 2 x 1 = 2

(2) उत्तर का दायां भाग = इकाइयों का गुणनफल
= 2 x 8 = 16

(3) आधार में जितने शून्य होते हैं, उत्तर के दायें भाग में उससे दो गुने अंक चाहिए।

उदाहरण - (2) 31 x 39

हल - उत्तर का बायां भाग = (द. x द. का एकाधिक)

= 3 x 4 = 12

उत्तर का दायां भाग = (इ. x इ.)

= 1 x 9 = 09

31 x 39 = 12/09 = 1209

यहां 9 के आगे शून्य रखना होगा क्योंकि इकाइयों का जोड़ 10 है अर्थात् आधार 10 है। दस में एक शून्य है अत: उत्तर के दायें भाग में दो अंक होने चाहिए ।

उदाहरण (3) 193 x 197

हल - 193 x 197

यहां इकाइयों का योग दस है तथा शेष समूह 19 समान हैं अत: सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि लागू होगा।

उत्तर का बायां भाग = 19 का एकाधिक x 19

= 20 x 19 = 380

उत्तर का दायां भाग = इ. x इ.

= 3 x 7 = 21

193 x 197 = 380/21 = 38021

(प्रश्न को समझाने के लिए यह सब लिखने की या बताने की आवश्यकता है वास्तव में प्रश्न हल करते समय सीधे उत्तर लिखना है)

उदाहरण (4) 304 x 306

हल- सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण, अन्त्ययोर्दशकेऽपि

उत्तर का बायां भाग = (30 का एकाधिक x 30)

= 31 x 30 = 930

उत्तर का दायां भाग = इ. x इ.

= 4 x 6 = 24

304 x 306 = 930/24 = 93024

उदाहरण (5) 198 x 102

हल - इस प्रश्न में इकाइयों का जोड़ दस है किन्तु शेष (बचे) समूह 19 और 10 बराबर नहीं हैं । ऐसी स्थिति में 98+02 = 100 को आधार लेकर हल करेंगे क्योंकि बचा सैकड़े के स्थान का अंक (1) दोनों ओर समान है।

उत्तर का बायां भाग = (एक का एकाधिक x एक)

= 2 x 1

उत्तर का दायां भाग = 98 x 2 = 196

198 x 102 = 2/0196 = 20196

दायीं ओर चार अंक होंगे क्योंकि आधार 100 में दो शून्य हैं। इस प्रकार 10, 100, 1000 ----- आदि आधार लेकर स्वयं प्रश्न बनायें तथा हल करें ।

अभ्यासमाला

(1)	34 x 36	(2)	42 x 48	(3)	55 x 55
(4)	102 x 108	(5)	117 x 113	(6)	81 x 89
(7)	204 x 206	(8)	292 x 298	(9)	295 x 205

उत्तरमाला

(1)	1224	(2)	2016	(3)	3025
(4)	11016	(5)	13221	(6)	7209
(7)	42024	(8)	87016	(9)	60475

6.5 सूत्र निखिलम्-आधार, उपाधार

इस सूत्र के प्रयोग से हम तब गुणा करते हैं जब संख्याएं आधार या उपाधार के निकट हों। यहां आधार, उपाधार तथा संख्या का इनसे विचलन के सम्बन्ध में ज्ञान प्राप्त करना आवश्यक है।

आधार - दस या दस की कोई भी घात से प्राप्त संख्या को आधार कहते हैं। जैसे 10, 100, 1000, ------ आदि।

उपाधार - आधार के गुणज या गुणनखण्ड उपाधार कहलाते हैं। जैसे 20, 30, 200, 300 ------ आदि।

विचलन - कोई संख्या आधार या उपाधार से कितनी कम या अधिक है यही उसका उस आधार/उपाधार से विचलन कहलाता है।

संख्या	आधार	उपाधार	विचलन
9	10	-	- 1
12	10	-	+ 2
23	10	20	+ 3
98	100	-	-02
104	100	-	+04
307	100	300	+07
989	1000	-	-011

किसी संख्या को विचलन के साथ ऐसे लिखते हैं

12 + 2

14 + 4

8 - 2 आदि।

यदि संख्या आधार/ उपाधार से कम है तब विचलन ऋणात्मक और अधिक है तो विचलन धनात्मक होता है।

6.5.1 आधार पर अवलम्बित उदाहरण ।

उदाहरण (1)

```
   1 2
 x 1 4
-----------
```

```
हल    12    +2
    x 14    +4
   -----------
      16 /  8
```

(1) आधार 10, दोनों संख्याएं 10 के निकट

(2) संख्याओं का आधार से विचलन ज्ञात कर चिह्न सहित लिखें ।

(3) आधार में जितने शून्य हों उत्तर के दायें भाग में उतने अंक रहेंगे।

उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा

= 2 x 4 = 8

उत्तर का बायां भाग = एक संख्या + दूसरी का विचलन

= 12 + 4 = 16

या = 14 + 2 = 16

उत्तर = 168

उत्तर की जांच :- 12 व 14 के बीजांक क्रमश 3 व 5 हैं ।

3 x 5 = 15, बीजांक 6 । उत्तर 168 का बीजांक भी 6 है ।

उदाहरण (2) 15
x 17

हल 15 +5
x 17 +7
----
25 / 5

(1) सर्वप्रथम यह देखते हैं कि संख्या किस आधार के निकट है। आधार निश्चित हो जाने पर विचलन ज्ञात कर प्रश्न सरलता से हल हो जाता है।

(2) उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा

= 5 x 7 = 35

केवल 5 दायें भाग में रहेगा, 3 अतिरिक्त अंक है ।

(3) उत्तर का बायां भाग= एक संख्या+दूसरी का विचलन+अति. अंक

= 15 + 7 + 3 = 25

या = 17 + 5 + 3 = 25

उत्तर = 255

उत्तर की जांच उपर्युक्त पद्धति से करें ।

<u>ध्यातव्य</u> : उत्तर में दायीं ओर विचलनों के गुणा में आधार के शून्यों की संख्या के बराबर अंक रखे जाते हैं । शेष अंक बायीं ओर की प्राप्त संख्या में जोड़े जाते हैं ।

यदि विचलनों के गुणा के अंक आधार के शून्यों की संख्या से कम हों तो इस गुणनफल के बायीं ओर पर्याप्त संख्या में शून्य लगाते हैं ।

उदाहरण (3) 8
x 13

हल - 8 -2 (1) आधार = 10
x 13 +3 (2) आधार से विचलन ज्ञात कर
---------- प्रश्न को हल करेंगे। विचलन चिह्न सहित लिखना चाहिए।

उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा

$= -2 \times 3 = -6 = \bar{6}$

उत्तर का बायां भाग = एक संख्या + दूसरी का विचलन

= 8 + 3 = 11

या = 13 - 2 = 11

उत्तर = $11\bar{6}$ = 104 (ऋणांक के अध्याय में देखें)

उदाहरण (4) 104
x 107

हल - 104 + 04 (1) विलोकनम् से स्पष्ट है संख्याओं का
x 107 + 07 आधार = 100 है।
----------- (2) चिह्न सहित विचलन लिखें।
111 / 28 (3) उत्तर के दायें भाग में उतने अंक रहेंगे
= 11128 जितने आधार में शून्य हैं।

(4) उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा

= 4 x 7 = 28

(5) उत्तर का बायां भाग= एक संख्या + दूसरी का विचलन

= 104 + 07 = 111

या = 107 + 04 = 111

उदाहरण - (5) 101
x 187

हल - 101 + 01 (1) इन दोनों संख्याओं का आधार 100 है।
x 187 + 87 (2) चिह्न सहित विचलन ज्ञात कर हल
-------- करेंगे। एक विचलन छोटा तथा एक
188 / 87

विचलन बहुत बड़ा होने पर भी सरलता से प्रश्न हल हो जाता है।

उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा

= 87 x 1 = 87

उत्तर का बायां भाग = एक संख्या + दूसरी का विचलन

101 + 87 = 188

या = 187 + 1 = 188

उत्तर = 18887

उदाहरण (6) 97

x 88

हल - 97 - 03 (1) आधार 100

x 88 - 12 (2) विचलन ऋणात्मक हैं ।

----

85 / 36 = 8536

उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा

= (-3) x (-12) = 36

उत्तर का बायां भाग= एक संख्या + दूसरी का विचलन

97 + (-12) = 85

या = 88 + (-3) = 85

उत्तर = 8536

उदाहरण (7) 98

x 123

हल - 98 -02 (1) आधार 100 है।

x 123 +23 (2) चिह्न सहित विचलन ज्ञात कर प्रश्न हल करेंगे।

----

121 / 46

(3) उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा

= -2 x 23 = -46= $\overline{4}\,\overline{6}$

(4) उत्तर का बायां भाग= एक संख्या + दूसरी का विचलन

= 98+23 = 121

या = 123-2 = 121

उत्तर = $121\overline{46}$ = 12054

ध्यातव्य : (1) ऋणांकों को हटाने के लिए - निखिलं सूत्र एवं एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र का प्रयोग करते हैं।

(2) इस तरह भी कह सकते हैं कि -

$121\overline{46}$ = 12100-46 = 12054

उदाहरण (8) 998
x 989

हल - 998 - 002
x 989 - 011
----
987 / 022 = 987022

(1) आधार 1000 है। उत्तर में दायीं ओर तीन अंक रहेंगे। शेष प्रकार समान है। देखिये और समझिये।

अभ्यासमाला

निखिलम् सूत्र का प्रयोग कर प्रश्न हल कीजिए - (प्रश्न हल करते समय हल करने की क्रिया विधि लिखने की आवश्यकता नहीं है सीधे उत्तर लिखिए) -

(1) 11 x 13 (2) 12 x 13 (3) 8 x 12

(4) 104 x 105 (5) 122 x 102 (6) 101 x 167

(7) 97 x 98 (8) 98 x 78 (9) 103 x 87

(10) 997
x 986
------

(11) 1004
x 1112
------

(12) 998
x 1231

उत्तरमाला

(1) 143 (2) 156 (3) 96 (4) 10920
(5) 12444 (6) 16867 (7) 9506 (8) 7644
(9) 8961 (10) 983042 (11) 1116448 (12) 1228538

6.5.2 सूत्र - निखिलम् एवं आनुरूप्येण, उपाधार

निखिलम् सूत्र से उपाधार के निकट की संख्याओं का भी गुणनफल ज्ञात किया जाता है। इसमें संख्या का उपाधार से विचलन ज्ञात करते हैं।

उदाहरण (1)

```
    2 2
  x 2 3
  ------
```

हल -

```
   22   +2
 x 23   +3
-----------
   50  /6
```

(1) संख्याओं का आधार 10 है। उपाधार 20 है।

(2) उपाधार से विचलन चिह्न सहित लिख कर प्रश्न हल करें।

(3) उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा
= 2 x 3 = 6

(4) उत्तर का बायां भाग ज्ञात करने के लिए -

(एक संख्या + दूसरी का विचलन) x $\frac{\text{उपाधार}}{\text{आधार}}$

= (22+ 3) x 2

या (23+ 2) x 2

= 25 x 2 = 50

(5) उत्तर = 506

उदाहरण (2)

```
        5 2
      x 4 7
      ------
```

हल - 52 +2 (1) संख्याओं का आधार 10 है।

x 47 -3 (2) उपाधार 50 है।

---------- (3) उपाधार / आधार = $\frac{50}{10}$ = 5

5 x 49 / $\bar{6}$ (4) विचलन ज्ञात कर हल करेंगे।

उत्तर $245\bar{6}$ (5) उत्तर का दायां भाग 2x(-3) = $\bar{6}$

= 2444 (6) उत्तर का बायां भाग = (47+2)x5

= 245

उदाहरण (3)

```
        6 3
      x 6 8
      ------
```

हल - 63 +3 आधार 10 है। उपाधार 60,

x 68 +8 उपाधार / आधार x = $\frac{60}{10}$ = 6

----

426 / $_{2}4$ उत्तर = 4284

(1) उत्तर का दायां भाग = 3 x 8 = 24

दायें भाग में एक अंक रहेगा क्योंकि आधार में एक शून्य है।

(2) उत्तर का बायां भाग

= [(एक संख्या + दूसरी का विचलन) x $\frac{\text{उपा.}}{\text{आ.}}$] + अति. अंक

= [(63+8) x 6] +2

= (71 x 6) + 2

= 426 + 2 = 428

(3) उत्तर 4284

उदाहरण (4)

```
  5 0 4
x 5 1 4
-------
```

हल - 504 + 04 (1) आधार 100

x 512 + 12 (2) उपाधार 500 अनुपात $\frac{500}{100}=5$

= (504+12)5/4x12

= 2580/48 = 258048

(1) उत्तर का दायां भाग = 4 x 12 = 48

दायें भाग में दो अंक रहेंगे क्योंकि आधार में दो शून्य हैं।

(2) उत्तर का बायां भाग

= (एक संख्या + दूसरी का विचलन) x $\frac{\text{उपाधार}}{\text{आधार}}$

= (504 + 12) x 5

= 516 x 5

= 2580

उदाहरण (5)

```
  5 2
x 5 4
------
```

हल - 52 + 2 (1) आधार 10 या 100 लिया जा सकता है, यहां हम 100 आधार लेकर करेंगे।

x 54 + 4

---------- (2) उपाधार = 50

28 / 08 = 2808

(3) $\frac{\text{उपा.}}{\text{आ.}} = \frac{500}{100} = \frac{1}{2}$

(4) उत्तर का दायां भाग = 2 x 4 = 08

(आधार 100 है अतः दायीं ओर दो अंक रखने होंगे।)

(5) उत्तर का बायां भाग

= (एक संख्या + दूसरी का विचलन) x $\frac{1}{2}$

$= (52+4) \times \frac{1}{2} = 56 \times \frac{1}{2} = 28$

उदाहरण (6)

```
   5 1 2
 x 4 9 7
 ------
```

हल -

```
  512     +12
x 497     -03
-----------
```

(1) आधार 1000

(2) उपाधार = 500

(3) 512-03 = 509

$\frac{1}{2}(509) / 0\,\bar{3}\,\bar{6}$

(4) $\frac{\text{उपा.}}{\text{आ.}} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$

$= 254\frac{1}{2} / 0\,\bar{3}\,\bar{6}$

$= 254 / \left(\frac{1}{2} \times 1000 + \bar{3}\bar{6}\right)$

$= 254 / 5\bar{3}\bar{6}$

$= 254464$

इस प्रश्न को आधार 100, उपा. 500 लेकर हल करेंगे।

```
  512    +12
x 497    -03
-----------
```

100 आधार लेने पर सरलता हुई । आधार, उपाधार का चयन ठीक प्रकार से होना चाहिए गणित में हो या जीवन में।

$5\,(509) / \bar{3}\bar{6} = 2545\bar{3}\bar{6} = 254464$

अभ्यासमाला

सूत्र निखिलम् (उपाधार)

उपयुक्त आधार, उपाधार को लेकर प्रश्नों को हल कीजिए -

```
(1)  2 1      (2)  3 2      (3)  2 8
   x 2 3         x 3 4         x 3 3
   ------        ------        ------
```

(4) 72
x 73
------

(5) 203
x 204
------

(6) 307
x 303
----

(7) 498
x 522
----

(8) 512
x 507
----

(9) 2123
x 2002

उत्तरमाला

(1) 483	(2) 1088	(3) 924
(4) 5256	(5) 41412	(6) 93021
(7) 259956	(8) 259584	(9) 4250246

6.5.3 निखिलम् सूत्र के प्रयोग से आधार के निकट की तीन संख्याओं का गुणा -

उदाहरण (1)

11 +1
12 +2
x 13 +3

$11+2+3 / {}_{1}1 / 6$
$16 / {}_{1}1 / 6$
$17/1/6 = 1716$

(1) आधार 10 है।
(2) विचलन चिह्न सहित लिखेंगे।
(3) उत्तर के तीन भाग होंगे।
(क) दायां (ख) मध्य (ग) बायां
(4) दायें तथा मध्य भाग में उतने ही अंक रहेंगे जितने आधार में शून्य हैं।

(5) उत्तर का दायां भाग = तीनों विचलनों का गुणनफल
= 1 x 2 x 3 = 6

(6) उत्तर का मध्य भाग = दो -दो विचलकों का गुणनफल कर उन गुणनफलों का योग।
= (1 x 2) + (2 x 3) + (1 x 3)

= 2+6+3

= 11

उत्तर के मध्य भाग में आधार 10 होने के कारण एक अंक रहेगा, 1 हासिल अतिरिक्त अंक है जो उत्तर के बायें भाग में जुड़ेगा।

(7) उत्तर का बायां भाग = (एक संख्या+दो अन्य संख्याओं के विचलनों का योग) + अति. अंक

(11+2+3)+1 = 17

उत्तर = 1716

उदाहरण (2)

102 +02 (1) आधार 100

103 +03 (2) दायें एवं मध्य भाग में दो-दो अंक।

105 +05

110/31/30 = 1103130

हल :

(3) दायां भाग = विचलनों का गुणा = 2x3x5=30

(4) मध्य भाग = वि. के जोड़े बनाकर गुणा, गुणनफल का योग

= (2x3)+(3x5)+(2x5)=31

(5) बायां भाग = एक संख्या+अन्य दो संख्याओं के विचलन

= 102+03+05=110

जांच के लिए तीनों संख्याओं के बीजांक को गुणाकर बीजांक का मिलान उत्तर के बीजांक से करें ।

अभ्यासमाला

निखिलम् का प्रयोग कर हल कीजिए -

(1)	(2)	(3)
11 x 11 11 -------	12 x 11 12 ------	11 x 13 13 ------

(4) 9
x 1 2
1 1
----

(5) 1 0 1
x 1 0 2
1 0 2
----

(6) 1 0 2
x 1 0 2
1 0 2
----

(7) 9 7
x 9 8
9 9
----

(8) 1 0 5
x 1 0 2
1 0 2
----

(9) 9 5
x 1 0 5
1 0 1

उत्तरमाला

(1)	1331	(2)	1584	(3)	1859
(4)	1188	(5)	1050804	(6)	1061208
(7)	941094	(8)	1092420	(9)	1007475

6.6.1 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से गुणा करना -

इस सूत्र के प्रयोग से किन्हीं दो संख्याओं का आपस में गुणा किया जा सकता है। तथा सीधे उत्तर एक ही पंक्ति में प्राप्त कर सकते हैं।

विधि सिखाते समय प्रश्न में छोटे अंकों का प्रयोग करना ठीक रहता है। सरल से कठिन की ओर सूत्र का ध्यान रखकर प्रश्न बनाना तथा हल कराना चहिए।

सूत्र - ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

अर्थ - ऊर्ध्व = खड़ा = ↑ (ऊपर -नीचे)

तिर्यक् = तिरछा = ↖ ↗ या ⤧

उदाहरण (1)

2
x 1 ↑

2

3
x 2 ↑

6

4 ↑
x 5

20

ऊर्ध्व गुणा

उदाहरण (2)

2 1
x 1 3
-----
2 / 7 / 3

समूह रचना तथा संकेत

$$\begin{bmatrix} III \\ 2 \\ \uparrow \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} II \\ 2 \quad 1 \\ \times \\ 1 \quad 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I \\ 1 \\ \uparrow \\ 3 \end{bmatrix}$$

गुणनफल 2x1 3x2+1x1 1x3

= 2 = 6+1=7 = 3

हल - (1) इकाई स्थान (प्रथम स्तम्भ)

1 ↑
x 3

3

(2) (इकाई एवं दहाई) (प्रथम तथा द्वितीय स्तम्भ)

2 1 तिर्यक गुणा, प्राप्त गुणनफलों का योग।
x 1 3

(2x3) + (1x1)
= 6 + 1 = 7

(3) दहाई स्थान (द्वितीय स्तम्भ)

2 ↑
x 1 ऊर्ध्व गुणा

2

तीन चरणों में प्रश्न हल हो जायेगा । उत्तर = 273

उदाहरण (3)

2 3
x 5 4

(उपरोक्त उदाहरण के अनुसार)

हल - (i) इकाई स्थान को प्रथम स्तम्भ

```
  2 3
x 5 4
-----
12/4/2
```

दहाई ---- द्वितीय स्तम्भ
सैकड़ा ---- तृतीय स्तम्भ
आदि क्रमशः कहेंगे।

(2) स्तम्भों की संख्या के दुगने से एक कम चरणों में प्रश्न हल होगा।

(3) प्रत्येक चरण में प्राप्त संख्या में से एक खण्ड में एक अंक रखेंगे शेष अंक आगे जोड़ेंगे। अन्तिम बायें चरण (खंड) में एक से अधिक अंक हो सकते हैं।

(4) प्रत्येक चरण के बाद उत्तर लिखते समय उर्ध्व रेखा खींचते हुए लिखते हैं ।

(5) एक-एक स्तंभ बढ़ाते हुए तथा अंत तक पहुंचने के बाद एक-एक स्तंभ छोड़ते हुए समूह आते हैं।

उक्त सभी बिन्दु प्रश्न हल करने में सहायक होंगे। उदाहरण देखें।

(1) प्रथम स्तम्भ का ऊर्ध्व गुणा

```
  3 ↑
x 4
----
 12
```

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तम्भ -

```
 2 3     तिर्यक गुणा,
 5 4     गुणनफल का
----     योग
```

(2x4) + (3x5)

= 8 + 15 = 23

23 + अति. अंक

= 23 + 1 = 24

(3) द्वितीय स्तंभ -

```
  2 ↑
x 5
----
 10
```

10 + अति. अंक 2 = 12

अंतिम बायें खण्ड में 12 पूरा का पूरा लिख दें।

उत्तर = 1242

अभ्यास हो जाने पर रेखा खींचने की आवश्यकता नहीं ।

उत्तर की जांच बीजांकों को गुणा करके करें ।

उदाहरण (4)

```
    1 2 3
x   2 1 1
---------
```

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् से हल कीजिए ।

हल - संकेत प्रश्न को हल करने में सहायक सिद्ध होते है।

```
  1 2 3
x 2 1 1
---------
2/5/9/5/3
```

```
1     1 2     1 2 3     2 3     3
↑     ↖↗      ↖↑↗       ↖↗      ↑
2     2 1     2 1 1     1 1     1
```

(1) प्रथम स्तम्भ

```
  3
x 1
--------
  3
```

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तम्भ

```
  2 3
x 1 1
---------
```

तिर्यक् गुणा करें, प्राप्त गुणनफलों का योग।

(2 x 1) +(3 x 1)

= 2+3 = 5

(3) प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय स्तम्भ

```
  1 2 3
x 2 1 1
---------
```

बाहर-बाहर का तिर्यक मध्य के स्तम्भ का ऊर्ध्व गुणा, प्राप्त गुणनफलों का योग।

(1 x 1) +(2 x 3)+(2 x 1) = 1 + 6+2 = 9

(4) द्वितीय+तृतीय स्तम्भ (प्रथम स्तम्भ छोड़ें) -

```
  1 2
x 2 1
---------
```

तिर्यक गुणा कर प्राप्त गुणनफलों का योग

(1 x 1) +(2 x 2) = 1+4 = 5

(5) तृतीय स्तम्भ (प्रथम + द्वितीय स्तम्भ छोड़ें) -

1 ↑ ऊर्ध्व गुणा

x 2

2

उत्तर = 25953

उदाहरण (5) (हल उदाहरण (4) के अनुसार)

3 4 5
1 2 3

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए।

हल -

3 4 5
1 2 3

$3/_{1}0/_{2}2/_{2}2/_{1}5 = 42435$

(1) 5
x 3
----
1 5

(2) 4 5
x 2 3

(4 x 3) + (2 x 5)

= 12 + 10 = 22

22 + अति. अंक 1 = 23

(3) 3 4 5
x 1 2 3

(3x3) + (1x5) + (4x2)
= 9 + 5 + 8 = 22
22 + अति. अंक 2 = 24

(4) 3 4
x 1 2

(3 x 2) + (1 x 4) = 6 + 4 = 10
10 + अति. अंक 2 = 12

(5) 3
x 1

3
3 + अति. अंक 1 = 4
उत्तर = 42435

उदाहरण (6)

1 2 3 2
x 2 1 2 1

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कर एक पंक्ति में उत्तर लिखिए ।

हल- - गुणा करते समय इस सिद्धान्त को ध्यान में रखना है कि एक-एक स्तम्भ बढ़ते क्रम से अन्त में पहुंचने पर एक-एक स्तम्भ छोड़ते हुए ऊर्ध्व-तिर्यक् गुणा करने से एक पंक्ति में उत्तर लिख सकते हैं। संख्या में कितने भी अंक क्यों न हों।

1 2 3 2
x 2 1 2 1

1	1 2	1 2 3	1 2 3 2	2 3 2	3 2	2
↑	╳	╳	╳	╳	╳	↑
2	2 1	2 1 2	2 1 2 1	1 2 1	2 1	1

$2/5/{}_{1}0/{}_{1}2/{}_{1}0/7/2$
= 2613072

क्रमशः इकाई की ओर से - सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् से -

(1) 2
x 1

2

(2) 32
x 21

(3 x 1) + (2 x 2) = 7

(3) 232
x 121

(2 x 1) + (1 x 2) + (3 x 2) = 10

(4) 1232
x 2121

(1 x 1) + (2 x 2) + (2 x 2) + (1 x 3) = 12

(5) 123
x 212

(1 x 2) + (2 x 3) + (2 x 1) = 10

(6) 12
x 21

(1 x 1) + (2 x 2)

(7) 1 ↑
x 2

2

उत्तर - 2613072

उदाहरण (7)

1 1 1 1
x 1 1 1 1

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए ।
हल सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग
उत्तर 1234321 है ।

अन्य विधि :-

जितनी बार एक है उतनी बार 1 से लेकर बढ़ते क्रम में 123 4 के बाद 321 घटते क्रम में लिखने से उत्तर प्राप्त हो जा

संख्या में जब बड़े-बड़े अंक हों तब विनकुलम का प्रयोग करने से सरलता होती है।

ण (8) 79x 87 विनकुलम का प्रयोग कर हल करें ।

79 = $1\bar{2}\bar{1}$

87 = 1 1 3

$1 \quad 1\ \bar{2} \quad 1\ \bar{2}\ \bar{1} \quad \bar{2}\ \bar{1} \quad \bar{1}$

↑ ⤧ ⤧ ⤧ ↑

$1 \quad 1\ \bar{1} \quad 1\ \bar{1}\ \bar{3} \quad \bar{1}\ \bar{3} \quad \bar{3}$

$1 / \bar{3} / \bar{2} / 7 / 3 = 6873$

अभ्यासमाला

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए -

	1 2 x 2 1 ------	(2)	3 4 x 2 1 ------	(3)	6 4 x 5 3 ------
	1 2 2 x 2 1 1 ------	(5)	2 3 4 x 2 1 2 ------	(6)	3 1 2 x 0 4 2 ------
	4 5 6 x 3 4 5 ------	(8)	1 2 2 2 x 2 2 2 1 ---------	(9)	2 5 x 5 2 ---------
	1 1 1 1 x 2 2 2 2 ---------				

इसी प्रकार प्रत्येक प्रकार के 20-20 प्रश्न बनाकर अभ्यास कराएं उत्तरों की जांच भी करें ।

उत्तरमाला

	252	(2)	714	(3)	3392
	25742	(5)	49608	(6)	13104
	157320	(8)	2714062	(9)	1300
	2468642				

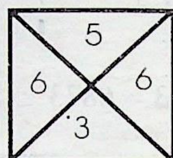
6.7 गुणा के प्रश्नों के उत्तर की जाँच बीजांक (9 के शेष) द्वारा -

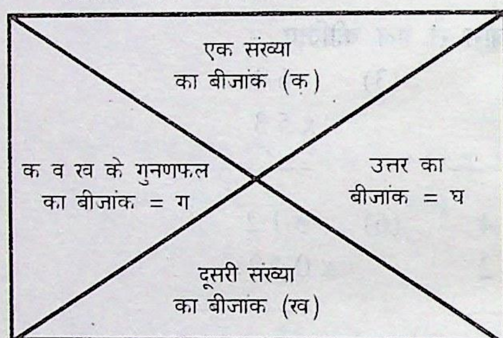
उदाहरण - (1)

104
x 102

हल - 104 +04 सूत्र निखिलम्
x 102 +02
----

106 / 08 = 10608





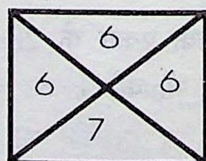
यदि ग व घ असमान हैं तो उत्तर निश्चित गलत है । यदि वे समान हैं तो सामान्यत: उत्तर ठीक है ।

उदाहरण (2)

1 2 3
x 2 0 5

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् से हल किया गया है।

2/4/$_1$1/$_1$0/$_1$5
= 25215



उत्तर की जाँच -

[प्रथम संख्या का बीजांक] X [द्वितीय संख्या का बीजांक] = उत्तर में प्राप्त संख्या का बीजांक

इस गुणनफल से प्राप्त संख्या का बीजांक

6 x 7 = 42

42 का बीजांक 6 = 6 उत्तर सही है।

अध्याय 7

वर्ग और घन

किसी संख्या को उसी से गुणा करने पर प्राप्त उत्तर उस संख्या का वर्ग होता है । यथा 6x6= 36 जो 6 का वर्ग है । 8 का वर्ग 8x8 = 64 है । इसे 6^2 तथा 8^2 लिखते हैं ।

7.1 आनुरूप्येण विधि :-

इस विधि का प्रयोग साधारणत. दो अंकों की संख्या के वर्ग के लिए किया जाता है। यह सीखने से पहले बालक को गुणा और भाग का अच्छा अभ्यास चाहिए।

उत्तर में तीन भाग बनाए जाते हैं। दहाई अंक का वर्ग सबसे बाएं भाग में लिखते हैं । बीच के भाग में इकाई और दहाई की संख्याओं को गुणा करके लिखते हैं । इसी संख्या को एक बार और भी बीच के भाग में लिखते हैं। सबसे दाहिने भाग में इकाई की संख्या का वर्ग लिखा जा सकता है। इस क्रिया को उदाहरण से समझेंगे। हम जानते हैं कि $(a+b)^2 = a^2+ab+ab+b^2$

उदाहरण (1) : 19^2

1^2 1 x 9 9^2
       1 x 9
\-\-\-\-\-\-\-\-\-
1   $_18$ $_81$ या 361 उत्तर

पहले भाग में दहाई अर्थात् 1 का वर्ग लिखा । दूसरे भाग में 1 और 9 को गुणा कर 1 x 9 लिखा और उसे दुबारा लिखा। तीसरे भाग में इकाई का वर्ग 9^2 लिखा। जोड़ने पर तीसरे भाग में 81 आया । 1 वहीं रहेगा और 8 बीच के भाग में जोड़ने के लिए नीचे की ओर लिखेंगे। बीच के भाग में 9+9 = 18 हुआ । 8 वहीं रहेगा और 1 को जोड़ने के लिए नीचे रखेंगे। फिर उत्तर आ जायेगा।

उदाहरण (2) 41^2

हल

$$\begin{array}{llll} 16 & 4 \times 1 & 1 & \\ & 4 \times 1 & & \\ \hline 16 & 8 & 1 & = 1681 \\ \hline \end{array}$$

दूसरा प्रकार है कि 16 में दहाई अंक 4 से भाग और इकाई अंक 1 से गुणा कर बीच के भाग में 4x1 लिखें । इसी तरह दायें भाग के लिए बीच के भाग में 4 से भाग और 1 से गुणा करें ।

उदाहरण (3) 64^2

$$\begin{array}{llll} 36 & 24 & 16 & \\ & 24 & & \\ \hline 36 & {}_{4}8 & {}_{1}6 & = 4096 \text{ उत्तर} \end{array}$$

64 के इकाई व दहाई के अंकों का 4 व 6 का अनुपात 2:3 है इसलिए बीच के भाग के लिए 36 में 6 से भाग और 4 से गुणा करने के स्थान पर उसे 3 से भाग और 2 से गुणा किया जा सकता है।

उदाहरण (4) 91^2

$$\begin{array}{llll} 81 & 9 & 1 & \\ & 9 & & \\ \hline 82 & 8 & 1 & = 8281 \end{array}$$

उदाहरण (5) 37^2

$$\begin{array}{llll} 9 & 21 & 49 & \\ & 21 & & \\ \hline 13 & 6 & 9 & = 1369 \end{array}$$

नीचे के प्रश्नों में बिना रेखा खीचें लिख रहे हैं बीच वाले भाग में दो बार न लिखकर सीधा ही दोगुना लिख रहे हैं।

धन

रण (6) $34^2 = 9_2 4_1 6 \quad = \quad 1156$

(7) $48^2 = 16_6 4_6 4 \quad = \quad 2304$

(8) $63^2 = 36_3 69 \quad = \quad 3969$

संकलन व्यवकलनाभ्याम् सूत्र से :-

वर्ग करने की दूसरी विधि इस सूत्र से है। सूत्र का अर्थ है जोड़कर घटा कर। शून्यान्त संख्या से एक कम या एक अधिक संख्या का वर्ग विधि से आसानी से निकाला जा सकता है। इसी प्रकार किसी संख्या र्ग मालूम हो या आसानी से मालूम किया जा सकता हो उस संख्या क कम या एक अधिक का वर्ग भी इस विधि से मिल जाएगा। विधि उदाहरण से समझाया जा रहा है।

रण (1) 20 से 19 एक कम और 21 एक अधिक है।

$19^2 = 20^2 - 20 - 19 = 361 \;:\; (20-1)^2 = (20^2 - 20 - 20 + 1)$

$21^2 = 20^2 + 20 + 21 = 441 \;:\; (20+1)^2 = (20^2 + 20 + 20 + 1)$

त : एक कम संख्या के वर्ग को घटाकर किया जाता है। 20^2 में 20 और फिर दी हुई संख्या 19 घटाएं।

एक अधिक संख्या के वर्ग को जोड़कर किया जाता है। 20^2 में 20 और फिर दी हुई संख्या जोड़ें।

व्य : बीजांक विधि से उत्तर की जांच की जा सकती है। जैसे

19 का बीजांक =1, वर्ग का बीजांक $1^2 = 1$ चाहिए

361 का बीजांक $3+6+1 = 10 \rightarrow 1+0 = 1$ है।

हरण (2) : 24 व 26 का वर्ग ज्ञात करें।

$25^2 = 2 \times 3 / 5 \times 5 \;=\; 625$

$26^2 = 625 + 25 + 26 \;=\; 676$

$24^2 = 625 - 25 - 24 \;=\; 576$

हरण (3) 194 और 196 का वर्ग ज्ञात करें।

: एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से $195^2 = 19 \times 20 / 5^2 = 38025$

(देखें 6.4)

$194^2 = 38025 - 195 - 194 = 37636$; $(195-1)^2$

$196^2 = 195^2 + 195 + 196 = 38025 + 391 = 38416$; $(195+1)^2$

उदाहरण (4) 299^2 और 301^2 ज्ञात करें।

$299^2 = 300^2 - 300 - 299 = 90000 - 599 = 89401$

$301^2 = 300^2 + 300 + 301 = 90601$

इस प्रकार के अनेक उदाहरणों से इस विधि का कक्षा में अभ्यास कराया जाय ।

7.3 यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् सूत्र से -

संख्या आधार से जितनी कम या अधिक मात्रा में हो, उस संख्या से उतना कम या अधिक कर उसमें वर्ग की भी योजना करें। यह इस सूत्र का अर्थ है। यह क्रिया बाएं से दाएं या दाएं से बाएं की जा सकती है । उदाहरण से यह समझाया जा रहा है।

उदाहरण (1) $7^2 = 7-3 \,/\, (-3)^2 = 49$

$(\text{संख्या})^2 = \text{संख्या} \pm \text{विचलन} \,/\, (\pm \text{विचलन})^2$

7 के लिए आधार संख्या 10 ली ; 10 से 7 का विचलन -3 है। बाईं ओर के खण्ड में 7 से और भी 3 कम कर 4 प्राप्त किया और दायीं ओर के खण्ड में इस -3 का वर्ग 9 रखा ।

उदाहरण (2) $11^2 = 11+1 \,/\, 1^2 = 121$

आधार से अधिक होने के कारण विचलन + 1 है।

उदाहरण (3) $41^2 = 4(41+1) \,/\, 1^2 = 1681$

उपाधार 40 लिया जो आधार का 4 गुना है। विचलन +1 है। 10 का 4 गुना 40 होने के कारण दूसरे खण्ड अर्थात् दहाई के खण्ड में 4 से गुना भी किया।

उदाहरण (4) $64^2 = 6(64+4) \,/\, 4^2 = 408 \,/\, {}_{1}6 = 4096$

उदाहरण (5) $34^2 = 3(34+4) \,/\, 4^2 = 114 \,/\, {}_{1}6 = 1156$

उदाहरण (6) $(988)^2 = 988 - 12 \,/\, 12^2 = 976144$

उदाहरण (7) $(1112)^2 = 1112 + 112 / (112)^2$

$= 1224 / 112 + 12 / 12^2$

$= 1224 / 124 / {}_1 44$ (आधार 100, अत: 2 अंक)

$= 1224 / {}_{12}544$ (आधार 1000, अत: 3 अंक)

$= 1236 / 544 = 1236544$ उत्तर

इनका भी खूब अभ्यास कराया जाय।

7.4 द्वन्द्वयोग विधि - यह चौथी विधि लिखी जा रही है।

7.4.1 द्वन्द्वयोग की गणना विधि -

(1) एक अंक की संख्या का द्वन्द्वयोग उस संख्या का वर्ग होता है। जैसे 2 का द्वन्द्वयोग $= 2^2 = 4$

(2) दो अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग दोनों अंकों को गुणा कर दो गुना करने पर मिलता है। जैसे 13 का द्वन्द्वयोग $= 2x\ (1x\ 3) = 6$

(3) तीन अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग पहली और अन्तिम संख्या को गुणा कर दो गुना करने और उसमें बीच की संख्या का वर्ग जोड़ने से प्राप्त होता है। जैसे 145 का द्वन्द्वयोग $= 2x(1x5) + 4^2 = 10 + 16 = 26$

(4) चार अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग मालूम करना हो तो पहली और चौथी के द्वन्द्वयोग में दूसरी और तीसरी का द्वन्द्वयोग अर्थात् उनके गुणा का दुगुना जोड़ें ।

जैसे 1346 का द्वन्द्वयोग $= 2\ x\ (1\ x\ 6) + 2\ x\ (3\ x\ 4) = 36$

(5) पांच अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग

= पहले और पांचवें अंक की संख्याओं का द्वन्द्वयोग [(2) से]

\+ दूसरे और चौथे अंक की संख्याओं का द्वन्द्वयोग [(2) से]

\+ तीसरे स्थान की संख्या का द्वन्द्वयोग अर्थात् वर्ग [(1) से]

इसी प्रकार और बड़ी संख्याओं का द्वन्द्वयोग ज्ञात किया जा सकता है।

7.4.2 द्वन्द्वयोग से वर्ग ज्ञात करना -

(क) जिस संख्या का वर्ग मालूम करना है उसमें दाहिनी ओर से एक-एक बढ़ती हुई और फिर एक एक घटती हुई संख्या में अंक लेकर समूह बनाते हैं। जैसे

31 के अंक समूह = 3, 31, 1

465 के अंक समूह = 4, 46, 465, 65, 5

2346 के अंक समूह = 2, 23, 234, 2346, 346, 46, 6

ध्यान दें कि किसी संख्या के वर्ग हेतु द्वन्द्वयोग के लिए बनाए अंक समूहों की गिनती दी हुई संख्या में अंकों की गिनती के दो गुने से एक कम होती है।

(ख) ऊपर लिखे अनुसार समूह बना लें । जितने समूह हैं वर्गमूल में उतने ही खण्ड होंगे। और प्रत्येक खण्ड में उस खण्ड के संगत के समूह का द्वन्द्वयोग लिखें। यह काम दाहिनी या बाईं ओर से हो सकता है।

उदाहरण (1) 31 का वर्ग द्वन्द्वयोग से ज्ञात करें।

क्रिया : पहला चरण - 31 के अंक समूह 3, 31, 1

दूसरा चरण - इनके द्वन्द्वयोग ज्ञात करें।

3 का $3^2 = 9$

31 का $2 \times 3 \times 1 = 6$

1 का 1

तीसरे चरण में उत्तर लिखें - $3^2/2x3x1/1^2 = 961$

अभ्यास होने पर पहला और दूसरा चरण मौखिक करें।

उदाहरण (2) $64^2 = 6^2 / 2x6x4 / 4^2 = \cdot 36 / {}_4 8 / {}_1 6 = 4096$
(समूह 6, 64, 4)

उदाहरण (3) $345^2 = 3^2 / 2x3x4 / 2x3x5 + 4^2 / 2x4x5 / 5^2$
$= 9 / {}_2 4 / {}_4 6 / {}_4 0 / {}_2 5$ (समूह 3, 34, 345, 45, 5)
= 119025

संकेत : (1) तीन अंक हैं, 3 x 2-1 = 5 अंक समूह बनेंगे जिनके द्वन्द्वयोगों को क्रमशः लिखने के लिए पांच स्थान चाहिए।

(2) क्रिया दाहिनी ओर से करने से मौखिक रूप से सीधे ही उत्तर लिखा जा सकता है। यह इस तरह हो सकता है।

$5^2 = 25$ का 5, हाथ में 2

45 का द्वन्द्वयोग 2x 4x 5=40 में 2 जोड़ने पर 42 का 2, हाथ में 4

345 का द्वन्द्वयोग 30+16=46 में 4 जोड़ने पर 50 का 0, हाथ में 5

34 का द्वन्द्वयोग 24 में 5 जोड़ने पर 29 का 9, हाथ में 2,

3 का द्वन्द्वयोग 9, इसमें 2 जोड़ने पर 11 ; उत्तर 119025

उदाहरण (4) 1403^2 ज्ञात करें।

क्रिया : -

$$1403^2 = 1^2 / 2(1 \times 4) / 0 + 4^2 / 2(1 \times 3) + 0 / 2(4 \times 3) + 0 / 0 / 3^2$$

$$= 18_1 66_2 409 = 1968409$$

उदाहरण (5) 34106 का वर्ग द्वन्द्वयोग विधि से ज्ञात करें।

$$34106^2 = 9 / {}_2 4 / 2(3 \times 1) + 4^2 / 2(3 \times 0 + 4 \times 1) / 2(3 \times 6 + 4 \times 0)$$

$$+ 1^2 / 2(4 \times 6 + 0 \times 1) / 2(1 \times 6) / 2 \times 0 \times 6 / 6^2$$

$$= 9_2 4 \; {}_2 2 \; 8_3 7_4 8_1 2 \; 0_3 6$$

$$= 1\ 1\ 6\ 3\ 2\ 1\ 9\ 2\ 3\ 6$$

7.5 बीजगणित में प्रयोग -

द्वन्द्वयोग का प्रयोग बीजगणित के अध्याय में विस्तार से समझाया जायगा। यहां मात्र एक उदाहरण दिया जा रहा है।

उदाहरण : $\left(3x^2 + 4x + 2\right)^2$ ज्ञात करें।

क्रिया : x को 10 के समान मानने पर 3 सैकड़ा, 4 दहाई और 2 इकाई के समान माना जा सकता है। अतः समूह इस प्रकार बनेंगे ।

3, 34, 342, 42, 2

इनके द्वन्द्वयोग x के घातों के साथ लेने पर

$$\left(3x^2 + 4x + 2\right)^2 = 3^2 x^4 + 2 \times 3 \times 4 x^3 + (2 \times 3 \times 2 + 4^2) x^2 + 2 \times 4 \times 2 x + 2^2$$

$$= 9x^4 + 24x^3 + 28x^2 + 16x + 4$$

ध्यान दें, अंक समूह 5 हैं अतः x के घात 4 से 0 तक कुल पांच होंगे।

अभ्यासमाला

1. आनुरूप्येण विधि से वर्ग निकालें एवं जाँच करें :-
   (क) 14, 16, 28, 46, 66, 96
   (ख) 111, 122, 412, 624

2. द्वंद्वयोग विधि से वर्ग निकालें :-
   (क) 23, 25, 34, 42, 56
   (ख) 153, 235, 435, 2345, 4236

उत्तरमाला

1. (क) 196, 256, 784, 2116, 4356, 9216
   (ख) 12321, 14884, 169744, 389376
2. (क) 529, 625, 1156, 1764, 3136
   (ख) 23409, 55225, 189225, 5499025, 17943696

7.6 सत्यापन : नवांक विधि से तथा एकादशांक विधि से वर्ग का सत्यापन किया जा सकता है। यह 7.4 उदाहरण 5 के लिए करके दिखाया जा रहा है।

(1) नवांक विधि से 34106 का बीजांक = 3+4+1+0+6 = 14 $\rightarrow$ 5 अत: $(34106)^2$ का बीजांक 5^2= 25 $\rightarrow$ 7 होना चाहिए। उत्तर का बीजांक 1+1+6+3+2+1+9+2+3+6 या 1+1+2+1+2 = 7 है। सत्यापन हो गया। (उदाहरण 5)

ध्यान दें कि नवांक विधि से बीजांक निकालने में 9 छोड़ा जा सकता है।

(2) एकादशांक विधि से 34106 का बीजांक = 6-0+1-4+3 =6 अत: 34106^2 का बीजांक 6^2 = 36 $\rightarrow$ 6-3 = 3 होना चाहिए। एकादशांक विधि से उत्तर का बीजांक = 6-3+2-9+1-2+3-6+1-1 = -8 $\rightarrow$ 11-8 = 3 सत्यापन हो गया।

7.7 घन निकालने की विधियाँ :

7.7.1 आनुरूप्येण विधि - इस विधि से जिस संख्या का घन निकालना हो वह साधारणत: दो अंकों की होनी चाहिए । उत्तर के लिए चार खण्ड होते हैं। दाहिनी ओर से इनमें क्रमश: उत्तर की इकाई, दहाई, सैकड़े और शेष के अंक आते हैं। उदाहरण से क्रिया समझाई जा रही है।

उदाहरण (1)

$21^3 = 2^3 / 2^2 \times 1 / 2 \times 1^2 / 1^3$

8 4

8 ${}_1$2 6 1 = 9261 उत्तर

संकेत : सबसे बाये भाग मे दहाई के अंक 2 का घन = 2^3

दूसरे भाग में (दहाई अंक $2)^2 \times$ (इकाई अंक) = $2^2 \times 1$

तीसरे भाग में (दहाई अंक) x (इकाई अंक)^2 = 2 x 1^2

अन्तिम चौथे भाग में (इकाई अंक)^3 = 1^3

(ii) अब बीच वाले दोनों स्थानों के नीचे उनका दोगुना लिखें। अपने अपने स्थान का जोड़ नीचे लिखें।

ध्यातव्य - प्रत्येक भाग में एक ही अंक रह सकता है। अतिरिक्त अंक बाईं ओर जोड़े जाते हैं। सबसे बाईं ओर के भाग में एक से अधिक अंक भी रह सकते हैं। हम जानते हैं कि $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

सत्यापन - नवांक विधि और एकादशांक विधि से उत्तर का सत्यापन किया जा सकता है। सामान्यतः नवांक विधि से अवश्य करें।

उपरोक्त उदाहरण में 21 का बीजांक 3

अतः 21^3 का 3^3 = 27→9 होना चाहिए।

उत्तर का बीजांक = 9261 = 2+6+1=9

उदाहरण (2) घनफल की गणना करें -

(क) 41 (ख) 63 (ग) 89 (घ) 91

हल (क) 41^3 = 64 $\quad {}_{1}6 \quad 4 \quad 1$

$\qquad\qquad\qquad {}_{3}2 \quad 8$

$\qquad\qquad 68 \quad 9 \quad 2 \quad 1$

घनफल = 68921

(ख) 63^3 = 216 108 54 27

$\qquad\qquad$ 216 108

= 216 $\quad {}_{32}4 \quad {}_{16}2 \quad {}_{2}7$

= 250/0/4/7 = 250047

(ग) 89^3 = 512 576 648 729

$\qquad\qquad$ 1152 1296

= 512 $\quad {}_{172}8 \quad {}_{194}4 \quad {}_{72}9$

= 704/9/6/9 = 704969

(घ) 91^3 = 729 81 9 1

162 18

729 / $_{24}$3 / $_{2}$7 / 1

= 753 5 7 1 = 753571

7.7.2 "यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्" सूत्र - आध
निकट की संख्याओं का घन इस विधि से ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण (3) 104 का घनफल क्या होगा ?

हल - $104^3 = (100+3x04) / 3x(04)^2/(04)^3$

= 112/48/64

चरण (क) संख्या की आधार संख्या एवं विचलन को ज्ञात किया
है। आधार संख्या = 100, विचलन = 04

(ख) घनफल में तीन भाग होते हैं -

बायां भाग / मध्य भाग / दायां भाग

(ग) बायां भाग = आधार संख्या + 3 x विचलन

= 100 + 3 x 04 = 112

(घ) मध्य भाग = 3 $(\text{विचलन})^2 = 3(04)^2 = 48$

(ड़) दायां भाग = $(\text{विचलन})^3 = (04)^3 = 64$

(च) यथा स्थान लिखने पर अभीष्ट घनफल प्राप्त

घनफल = 1124864

<u>**ध्यातव्य**</u> (1) दायें भाग एवं मध्य भाग में आधार संख्या में शून्यों की
के तुल्य अंक लिखे जाते हैं।

(2) दायें भाग में एवं मध्य भाग में अंकों की संख्या कम होने प
ओर शून्य बढ़ा लेते हैं।

(3) दायें भाग एवं मध्य भाग में अंकों की संख्या अधिक है
अतिरिक्त अंक बायीं ओर जोड़े जाते हैं।

(4) बीजांक (नव शेष) विधि से उत्तर की जांच की जाती है

उदाहरण (4) घनफल ज्ञात करें।

(क) 102 (ख) 109 (ग) 1005 (घ) 1013

हल -

(क) 102^3 = 106 / 12 / 08 = 1061208

(ख) 109^3 = 127 / .43 / ${}_{7}29$ = 1295029

(ग) 1005^3 = 1015 / 075 / 125 = 1015075125

(घ) 1013^3 = 1039 / 507 / ${}_{2}197$ = 1039509197

उदाहरण (5) घनफल ज्ञात करें ।

(क) 97 (ख) 998 (ग) 991 (घ) 9987

हल -

(क) 97^3 = $91 / 27 / \overline{27}$ = 912673

(ख) 998^3 = $994 / 012 / 00\overline{8}$ = 994011992

(ग) 991^3 = $973 / 243 / \overline{729}$ = 973242271

(घ) 9987^3 = $9961 / 0507 / \overline{2}\overline{1}\overline{9}\overline{7}$ = 996105067803

7.7.3 आनुरूप्येण + यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् विधि - उपाधार संख्या के निकट की संख्याओं का घन इस विधि से ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण (6) 204^3 की गणना करें।

हल - $204^3 = 2^2 (200 + 3 \times 04) \,/\, 2 (3 \times (04)^2) \,/\, (04)^3$

$= 4 \times (212) / 2 \times 48 / 64$

$= 8489664$

संकेत (क) आधार 100 उपाधार 200 लिया। उपाधार में विचलन = 04

(ख) उपाधार से आधार का अनुपात = 200 ÷ 100 = 2, आधार में शून्यों की संख्या = 2

(ग) घनफल में तीन खण्ड होते हैं। दायीं ओर तथा बीच के खण्ड में दो दो अंक होंगे।

(घ) बायां भाग = $(\text{अनुपात})^2$ (आधार + 3xविचलन) = $2^2 (200 + 12)$

(च) मध्य भाग = अनुपात x3$(\text{विचलन})^2 = 2 \times 3 \times 4^2 = 6 \times 16 = 96$

(छ) दायां भाग = $(\text{विचलन})^3 = (04)^3 = 64$

(ज) यथा स्थान लिखने पर अभीष्ट घनफल प्राप्त होता है।

घनफल = 8489664

उत्तर की जांच बीजांक विधि से की जाती है।

उदाहरण (7) घनफल ज्ञात करें -

(क) 199 (ख) 209 (ग) 307 (घ) 298

हल - (क) $199^3 = 2^2\{200+3x(-1)\} / 2x3(0\bar{1})^2 / (0\bar{1})^3$

$= 4(197)/06/0\bar{1}$

$= 7880599$

(ख) $209^3 = 2^2 (200+3x9)/ 2(3x09^2)/(09)^3$

$= 4(227)/{}_486/{}_729$

$= 908/{}_486/{}_729$

$= 9129329$

(ग) $307^3 = 9(321)/3 x 3 x 49/343$

$= 2889/{}_441/{}_343$

$= 28934443$

(घ) $298^3 = 9(30\bar{8})/3x12/0\bar{8}$

$= 27\bar{7}\bar{2}/36/0\bar{8}$

$= 26283592$

जांच के लिए संख्या के बीजांक को तीन बार गुणा कर पुनः बीजांक = प्राप्त घनफल का बीजांक

7.7.4 एकाधिकेन पूर्वेण विधि :- यहां केवल दो अंकों की ऐसी संख्याओं का घन निकालने की विधि दी जा रही है जिनके अन्त में 5 हो । उदाहरण से यह विधि बताई जा रही है।

उदाहरण (1) 25^3 **ज्ञात करें।**

यहां पहला भाग (इकाई का अंक) 5 और दूसरा भाग 2 है। घनफल के चार भाग बाईं ओर से होंगे।

पहला भाग - दूसरे अंक का वर्ग x एकाधिक = $2^2 x3 = 12$

दूसरा भाग - दूसरा अंक x एकाधिक x पहला अंक = $2x3x5 = 30$

तीसरा भाग - दूसरा अंक x पहले अंक का वर्ग = $2 x 5^2 = 50$

चौथा भाग - पहले अंक का घन = $5^3 = 125$

अत: $25^3 = 12 / {}_{3}0 / {}_{5}0 / {}_{12}5$

$= 15 \quad 6 \quad 2 \quad 5 = 15625$

उदाहरण (2) $65^3 = 36x7 / 6x7x5 / 6x25 / 125$

$= 252 / {}_{21}0 / {}_{15}0 / {}_{12}5$

$= 274 \quad 6 \quad 2 \quad 5 = 274625$

प्रश्नमाला

निम्नलिखित में प्रश्न 1 से 9 तक में वर्ग ज्ञात करें।

(1) 59 (2) 114 (3) 91 (4) 9983

(5) 309 (6) 99999 (7) 99999999 (8) 1111

(9) 3333 (10) 49 एवं $5\frac{1}{2}$ का वर्गफल ज्ञात करें।

(11) विभिन्न विधियों से हल करें :-

(क) 95^2 (ख) 999^2 (ग) 1222^2

प्रश्न 12 से 17 तक में घनफल ज्ञात करें।

(12) 62 (13) 83 (14) 114 (15) 9996

(16) 302 (17) 293

उत्तरमाला

(1) 3481 (2) 12996 (3) 8281

(4) 99660289 (5) 95481 (6) 9999800001

(7) 9999999800000001 (8) 1234321

(9) 11108889 (10) 2401; 2601 (11) (क) 9025

(11) (ख) 998001 (11) (ग) 1493284

(12) 238328 (13) 571787 (14) 1481544

(15) 998800479936 (16) 27543608 (17) 25153757

अध्याय 8

वर्गमूल

8.1 विलोकनम् विधि से पूर्णवर्ग संख्या का वर्गमूल :-

10 का वर्ग 100 होता है। अत: एक अंक की संख्या का वर्ग 100 से कम अर्थात् एक या दो अंकों का होगा। इसी तरह दो अंकों की संख्या का वर्ग तीन या चार अंकों का, तीन अंकों की संख्या का वर्ग पांच या छः अंकों का होगा। इसी तरह आगे भी। अत: संख्या के अंकों को देखकर वर्गमूल कितने अंकों की संख्या होगी यह मालूम हो जाता है।

अभी हम चार अंकों तक की संख्या के वर्गमूल पर विचार करेंगे। इनका वर्गमूल विलोकनम् विधि से ज्ञात किया जा सकता है। निम्न सारणी देखें -

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वर्ग	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
बीजांक	1	4	9	7	7	9	4	1	9	-

8.2 अपूर्ण वर्ग संख्या की पहचान- सारणी देखें।

(1) वर्ग संख्या की इकाई में 1, 4, 5, 6, 9 अर्थात् 1,4,5 या इनकी परममित्र संख्या ही हैं। अत: इकाई में 2, 3 अथवा इनके परममित्र 7, 8 हों तो संख्या पूर्णवर्ग नहीं है। जैसे 11, 102, 123 आदि ।

(2) संख्या का बीजांक 1 से 9 तक हो सकता है। सारणी से वर्गसंख्या का बीजांक 1, 4, 7, 9 में से कोई है। अत: बीजांक 2,3,5,6 या 8 हो तो वह संख्या पूर्णवर्ग नहीं है।

(3) वर्गसंख्या के अन्त में दो शून्य आ सकते हैं। अन्त में चार, छः आदि शून्य भी आ सकते हैं। संख्या के अन्त में एक या तीन या पांच शून्य हों तो वह संख्या पूर्णवर्ग नहीं है। जैसे 1000, 25000 आदि।

उपरोक्त जांच से पूर्णवर्ग न होने का निश्चित पता चलता है। शेष संख्याएं पूर्णवर्ग अवश्य हैं ऐसा नहीं है।

8.3 पूर्णवर्ग संख्या का दहाई का अंक: विलोकनम् से यह कार्य किया जा सकता है। ऊपर की सारणी देखें। 8 का वर्ग 64 और 9 का 81 है। अत: 6400 से 8099 तक की संख्या के वर्गमूल में दहाई अंक 8 होगा। इसी प्रकार से दहाई अंक कितना होगा इसका विचार करने पर निम्नांकित सारणी तैयार होती है।

संख्या	दहाई अंक	संख्या	दहाई अंक
100 - 399	1	3600 - 4899	6
400 - 899	2	4900 - 6399	7
900 - 1599	3	6400 - 8099	8
1600 - 2499	4	8100 - 9999	9
2500 - 3599	5		

8.4 पूर्ण वर्गसंख्या के वर्गमूल का इकाई अंक - यह भी विलोकनम् विधि से हो जायेगा। ऊपर की प्रथम सारणी देखें। स्पष्ट है कि

संख्या का चरमांक	वर्गमूल का चरमांक
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

इस विधि से प्राप्त वर्गमूल के चरमांक परस्पर परममित्र हैं इस पर ध्यान दें। दोनों में से कौन-सा चरमांक सही है इसे जानने की विधि एकाधिकेन पूर्वेण है। इसे उदाहरण से समझाया जा सकता है। उदाहरण ये हैं -

उदाहरण (1) पूर्ण वर्गसंख्या 5184 का वर्गमूल ज्ञात करें।

क्रिया : (क) दाहिनी ओर से दो दो के जोड़े बनाएं । पहला जोड़ा 84 और दूसरा 51 है। यह बायीं ओर का जोड़ा 49 और 64 के बीच है, दहाई अंक = 7

(ख) चरमांक 4 है। अत: वर्गमूल का इकाई अंक 2 या 8 होगा। अत: वर्गमूल 72 या 78 होगा।

(ग) एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र का प्रयोग करें। पूर्व अंक 7 है जिसका एकाधिक 8 है। इस 8 से 7 का गुणा करें तो 56 मिलता है। दी हुई संख्या 5600 से कम है। अतः छोटी संख्या अर्थात् 72 सही उत्तर है।

उदाहरण (2) पूर्ण वर्गसंख्या 6084 का वर्गमूल ज्ञात करें।

क्रिया : (क) दाहिनी ओर से दूसरा जोड़ा 60 है जो 49 और 64 के बीच है अतः दहाई अंक = 7

(ख) चरमांक 4 है अतः वर्गमूल का इकाई अंक 2 या 8 होगा।

(ग) 7 को एकाधिक अर्थात् 8 से गुणा करने पर 56 होता है। दूसरा जोड़ा 60 इस 56 से बड़ा है। अतः वर्गमूल बड़ी वाली संख्या 78 होगी, 72 नहीं ।

<u>**ध्यातव्य**</u> (1) संख्या के चरमांक के विलोकनम् से वर्गमूल का इकाई अंक प्राप्त होता है। संभावित इकाई अंक दो हो सकते हैं।

(2) संख्या के चरमांक वाला जोड़ा प्रथम होता है। शेष अंकों से दूसरा जोड़ा बनता है।

(3) दूसरे जोड़े के विलोकनम् से वर्गमूल का दहाई अंक प्राप्त होता है।

(4) दहाई अंक और इसके एकाधिक का गुणनफल निकालें। संख्या का दूसरा जोड़ा इस गुणनफल से छोटा हो तो इकाई के लिए छोटा अंक चुनें और बड़ा हो तो इकाई के लिए बड़ा अंक चुनें।

(5) हम जानते हैं कि इकाई अंक 5 वाली संख्या के वर्ग का पूर्व भाग दहाई अंक और इसके एकाधिक का गुणनफल होता है । अतः विलोकनम् से यह जानकारी प्राप्त होती है कि संख्या के वर्गमूल की इकाई 5 से कम है या अधिक है ।

चार अंकों से अधिक और अपूर्ण संख्याओं का वर्गमूल निकालना अपने पाठ्यक्रम में नहीं रखा है। यद्यपि इसके लिए पद्धति बहुत ही सरल है ।

अध्याय 9

घनमूल

9.1 अपूर्ण घन संख्याओं की पहचान

छः या कम अंकों की पूर्णघन संख्याओं का घनमूल विलोकनम् पद्धति से ज्ञात किया जा सकता है। निम्नांकित सारणी को देखें।

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
घन	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
बीजांक	1	8	9	1	8	9	1	8	9	-

उपरोक्त सारणी से पता चलता है कि

(1) घनसंख्या के बीजांक 1, 8, 9 ही हो सकते हैं। अत: बीजांक इन तीनों के अतिरिक्त और कोई हो तो वह संख्या पूर्णघन नहीं हो सकती।

(2) जिन संख्याओं की दाईं ओर शून्यों की संख्या तीन या तीन के अपवर्त्य (गुणज) नहीं होती वे संख्याएँ अपूर्ण घन संख्या होती हैं। जैसे 100, 80000, 1250000 आदि अपूर्ण घन संख्या हैं।

9.2 पूर्ण घन संख्या के घनमूल का चरमांक ज्ञात करना-सारणी देखें।

(1) संख्या का चरमांक 2 हो तो घनमूल का चरमांक 8 होगा जो 2 का परममित्र है। और संख्या का चरमांक 8 हो तो घनमूल का 2 होगा।

(2) संख्या का चरमांक 3 हो तो घनमूल का 7 और संख्या का चरमांक 7 हो तो घनमूल का 3 होगा।

(3) संख्या का चरमांक इनके अतिरिक्त कुछ भी हो जैसे 1,4,5,6,9,0 हो तो घनमूल का चरमांक भी वही होगा।

अत: विलोकनम् पद्धति से किसी भी पूर्ण घन संख्या का चरमांक (इकाई का अंक) लिखा जा सकता है।

9.3 छः अंकों तक की पूर्ण घन संख्या का दहाई अंक ज्ञात करना- संख्या के तीन-तीन अंकों के खण्ड दाहिनी ओर से करें। दूसरा खण्ड तीन से कम अंकों का हो रहा हो तो होने दें। जैसे 17576 का पहला खण्ड

576 और दूसरा 17 होगा। ऊपर की सारणी देखें। पूर्ण घन संख्या के दूसरे खण्ड को देखकर ही घनमूल का दहाई का अंक बताया जा सकता है।

संख्या का दूसरा खण्ड	घनमूल का दहाई अंक	संख्या का दूसरा खण्ड	घनमूल का दहाई अंक
1 से 7	1	216 से 342	6
8 से 26	2	343 से 511	7
27 से 63	3	512 से 728	8
64 से 124	4	729 से 999	9
125 से 215	5		

उदाहरण (1) 17576 के घनमूल में इकाई में 6 होगा क्योंकि संख्या का चरमांक 6 है और दूसरा खण्ड 17 है। अत: दहाई के स्थान पर 2 होगा। घनमूल 26 होगा।

उदाहरण (2) पूर्णघन संख्या 29791 का घनमूल ज्ञात करें।

क्रिया :चरमांक 1 है, घनमूल का चरमांक भी 1 होगा।

दूसरा खण्ड 29 है। सारणी से दहाई अंक 3 होगा।

घनमूल = 31

<u>ध्यातव्य</u> : (1) अपूर्ण घन संख्या ज्ञात करने की बीजांक पद्धति सभी अपूर्ण को नहीं बताती। जैसे 72 का बीजांक 9 होने पर भी 72 पूर्णघन संख्या नहीं है। अत: कोई संख्या पूर्णघन संख्या है या नहीं यह जांचने की आवश्यकता होने पर बीजांक और शून्य की जांच असफल होने पर हम कहेंगे कि संख्या पूर्णघन नहीं है परन्तु सफल होने पर यह निश्चित रूप से नहीं कह सकते कि संख्या अवश्य ही पूर्णघन है।

(2) सारणी देखें। 1000 तक केवल 10 ही संख्याएं पूर्णघन हैं और ये संख्याएं 1, 8, 27, 64, 125, 216, 345, 512, 729 और 1000 हैं। इनके अतिरिक्त सभी 1000 से छोटी संख्याएं अपूर्ण घन संख्याएं हैं।

अभ्यासमाला

अधोलिखित पूर्णघन संख्याओं का घनमूल अवलोकनम् विधि से ज्ञात करें।

(क) 1728 (ख) 42875 (ग) 3375 (घ) 1331
(ङ) 9261 (च) 85184 (छ) 729 (ज) 1000
(झ) 5832 (ञ) 2197

उत्तरमाला

(क) 12 (ख) 35 (ग) 15 (घ) 11 (ङ) 21 (च) 44 (छ) 9
(ज) 10 (झ) 18 (ञ) 13

अध्याय 10
भाग संक्रिया

वैदिक गणित में गुणन संक्रिया के समान ही भाग संक्रिया भी बड़ी सरल है। इसमें अनेक विधियां उपयोग में लायी जाती हैं। जब भाजक आधार के निकट तथा आधार से कम होता है तब भाग संक्रिया में 'निखिलम्' विधि अधिक सुविधाजनक रहती है।

10.1 निखिलम् विधि

भाग संक्रिया प्रारम्भ करने से पूर्व प्रश्न लिखते समय निम्न सावधानियां रखनी चाहिये।

1. भाजक का निकटतम आधार निश्चित कर उसकी पूरक संख्या ज्ञात कीजिये। कहीं-कहीं पूरक संख्या को संशोधित गुणांक भी कहते हैं। भाजक यदि एक अंकीय संख्या होता है तो उसका परम मित्र अंक ही पूरक संख्या होता है। आधार में जितने शून्य होते हैं, उतने ही अंक पूरक संख्या में होते हैं।
2. भाग संक्रिया में निर्धारित स्थान के दो खड़ी रेखाओं द्वारा तीन खण्ड बनाइये।
3. बायीं ओर से प्रथम खण्ड में भाजक व उसके नीचे उसकी पूरक संख्या लिखिये।
4. आधार में जितने शून्य हैं, भाज्य के उतने ही अंतिम अंक (इकाई से लेकर) तीसरे खण्ड में लिखिये।
5. भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखिये।

उदाहरण : $121 \div 8$ को कैसे लिखें?

क्रिया : 8 का निकटतम आधार = 10 पूरक संख्या = 2 आधार में शून्य एक, अत: तीसरे खण्ड में 1 तथा मध्य खण्ड में 12 लिखें। अत: प्रश्न लिखने का रूप निम्न बना।

प्रथम खण्ड	मध्य खण्ड	तृतीय खण्ड
8	1 2	1
2		

मध्य खण्ड में लिखे बायीं ओर से भाज्य के प्रथम अंक को नीचे भागफल के स्थान पर लिखिये। इस अंक का पूरक संख्या से गुणा कर गुणनफल को मध्य खण्ड के ही दूसरे अंक के नीचे लिखिये। गुणनफल में दो अंक हों तो तीसरे अंक के नीचे भी लिखें। केवल दूसरे स्थान के ऊपर नीचे के अंकों को जोड़िये और भागफल के स्थान पर लिखिये। अभी तीसरे स्थान के अंकों को नहीं जोड़ना है। प्राप्त योग अंक का फिर पूरक संख्या से गुणा कर, गुणनफल को भाज्य के तीसरे अंक के नीचे लिखिये और जोड़िये। यह प्रक्रिया दोहराते जाइये, जब तक कि गुणनफल के अंक तृतीय खण्ड के अंतिम अंक (भाज्य का इकाई अंक) के नीचे तक न लिखे जाएं । अन्त में जोड़ने पर मध्य खण्ड का नीचे लिखा भागफल तथा तृतीय खण्ड के नीचे लिखा शेषफल होता है।

<u>ध्यातव्य</u> : यदि अंत में प्राप्त शेषफल भाजक से बड़ा हो तो उसमें से भाजक घटा कर भागफल एवं शेषफल को संशोधित कर लीजिये।

विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा सकती है।

उदाहरण : 121 ÷ 8

भाजक	8	1	2	1
आधार	2		2	
से अंतर				8
भागफल		1	4	9
संशोधित			+1	-8

भागफल = 15, शेष 1

संकेत

(i) प्रश्न लिखा - उपरोक्त उदाहरण के समान ।

(ii) क्रिया : मध्य खण्ड का 1 नीचे भागफल के सामने के स्थान पर लिखें

(iii) यह अंक 1x पूरक संख्या 2=2, लिखें 2 के नीचे 2

(iv) योग = 2 + 2 = 4, नीचे लिखें भागफल के स्थान पर

(v) पुन: गुणनफल = 4x2=8

(vi) 8 लिखें तृतीय खण्ड में 1 के नीचे भागफल = 14, शेषफल' = 9

(vii) भाजक= 8 अत: संशोधित भागफल =15, शेषफल = 1

इस प्रकार का केवल 2 के पहाड़े का प्रयोग हुआ ।

उदाहरण : 1245 ÷ 97 संकेत

97	1 2	4 5
03	0	3
		0 6
	1 2	8 1

(i) भाजक = 97, आधार = 100, पूरक संख्या = 03

(ii) तृतीय खण्ड में 45 व मध्य खण्ड में 12 लिखें

(iii) मध्य खण्ड का 1 नीचे लिखा भागफल के स्थान पर

(iv) गुणनफल = 1x03 = 03

(v) लिखें 2 के नीचे 0 व 4 के नीचे 3,

(vi) योग 2+0=2, लिखें योग कर भागफल के स्थान पर

(vii) पुन: गुणनफल = 2 x 03 = 06, लिखें अंतिम अंकों के नीचे।

(viii) योग करने पर भागफल=12, शेषफल=81 यहां संशोधन की आवश्यकता नहीं है ।

अभ्यासमाला

निखिलम् विधि से भाग कीजिये।

(1) 102÷9 (2) 215÷9 (3) 311÷8

(4) 124÷89 (5) 198÷96 (6) 2320÷9

(7) 2112÷97 (8) 111034÷889 (9) 111235÷989

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9
भागफल	11	23	38	1	2	257	21	124	112
शेषफल	3	8	7	35	6	7	75	798	467

10.2 सूत्र परावर्त्य योजयेत्

यदि भाजक आधार के निकट होता है तो भाग संक्रिया में सूत्र 'परावर्त्य योजयेत्' पर आधारित विधि अधिक उपयोगी रहती है । भाजक आधार में छोटा है या बड़ा है - इस बात का विधि पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

8। सूत्र का अर्थ है, ''चिह्न परावर्तित कीजिये और संक्रिया प्रारम्भ कीजिये''।

सूत्र आधारित विधि :

(1) भाजक का उसके निकटतम आधार के सापेक्ष विचलन ज्ञात कीजिये। यह विचलन पूरक संख्या का ऋणात्मक मान होता है।

(2) विचलन में यदि 5 से बड़े अंक हों तो उन्हें विनकुलम प्रयोग से छोटे अंकों में बदल दीजिये।

(3) अब विचलन के प्रत्येक अंक का चिह्न परावर्तित कर दीजिये।

(4) प्रश्न लिखने का रूप निखिलम् विधि से मिलता-जुलता है।

(i) बायीं ओर से प्रथम खण्ड में भाजक, उसके नीचे विचलन तथा विचलन के नीचे परावर्तित अंक लिखिये। अभ्यास होने पर परावर्तित अंक सीधे भाजक के नीचे लिखे जा सकते हैं।

(ii) पूरक संख्या या विचलन के आधार पर पहले तृतीय खण्ड में तथा बाद में मध्य खण्ड में भाज्य संख्या के अंक लिखिये।

(5) आगे की क्रिया अब निखिलम् विधि के समान है।

निम्न उदाहरणों से विधि स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण : 1234 ÷ 112

112	1 2	3 4
12	-1	-2
-1 -2		-1 -2
	1 1	0 2

संकेत

(i) भाजक = 112, आधार 100, विचलन = 12, दो अंक

(ii) परावर्तित अंक = -1-2

(iii) अत: तृतीय खण्ड में 34 व मध्य खण्ड में 12

(iv) आगे की क्रिया निखिलम् विधि के समान

(v) भागफल = 11, तथा शेषफल = 02

अभ्यासमाला 1

सूत्र परावर्त्य योजयेत् आधारित विधि से भाग कीजिये।

(1) 134 ÷ 11 (2) 1154 ÷ 103 (3) 124 ÷ 89

(4) 1358 ÷ 113 (5) 1121 ÷ 121 (6) 1334 ÷ 131

(7) 298 ÷ 96 (8) 199 ÷ 97 (9) 406 ÷ 9

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9
भागफल	12	11	1	12	9	10	3	2	45
शेषफल	2	21	35	02	32	24	10	5	1

10.3 ध्वजांक विधि (सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक्)

भाग संक्रिया का प्रत्येक प्रश्न इस विधि के द्वारा बड़ी सरलता से हल किया जा सकता है। भाग संक्रिया प्रारम्भ करने से पूर्व प्रश्न लिखते समय निम्न सावधानियां रखनी चाहिये।

1. सर्वप्रथम भाजक को इच्छानुसार दो भागों (parts) में विभाजित कीजिये। भाजक के सबसे बाएं अंक को मुख्यांक कहते हैं और इकाई युक्त भाग को ध्वजांक कहते हैं । मुख्यांक संशोधित भाजक होता है ।
2. इस विधि में भी भाग संक्रिया के निर्धारित स्थान को तीन खण्डों में विभाजित कीजिये। प्रथम खण्ड में भाजक के दो भाग लिखिये- संशोधित भाजक अर्थात् मुख्यांक को नीचे अर्थात् आधार स्थान पर तथा ध्वजांक को उसके ऊपर अर्थात् घात अंक के स्थान पर।
3. ध्वजांक में जितने अंक हैं, भाज्य के उतने ही अंतिम अंक (इकाई से लेकर) तीसरे खण्ड में तथा भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखिये।
4. मुख्यांक द्वारा ही भाग की मुख्य क्रिया पूरी होती है।

निम्न उदाहरणों से विधि को स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण : 4922 ÷ 23 करें ।

भाजक 23 के दो भाग, मुख्यांक = 2, ध्वजांक = 3 । अब प्रश्न का निम्न रूप बना।

2^3	4	${}_{0}9$	${}_{1}2$	${}_{1}2$
	2	1	4	0
	भागफल			शेषफल

भाजक 23 के दो भाग : मुख्यांक = 2 ध्वजांक = 3

इसे प्रथम खण्ड में लिखें । तृतीय खण्ड में ध्वजांक एक ही अंक है इसलिए 4922 का एक अंतिम अंक 2 लिखें ।

मध्य खण्ड में भाज्य का शेष भाग 492 लिखें ।

(ii) मध्य खण्ड बायीं ओर से भाज्य के पहले अंक 4 को मुख्यांक 2 से भाग दीजिये। 4 ÷ 2 = 2 (भागफल का प्रथम अंक) तथा प्रथम शेषफल = 0

क्षितिज रेखा के नीचे भागफल अंक 2 को लिखा और मध्य खण्ड के बायीं ओर से दूसरे अंक 9 से पहले और नीचे शून्य लिखा । नया भाज्य = 09, अब संशोधित भाज्य ज्ञात करना है।.

संशोधित भाज्य = नया भाज्य - प्राप्त भागफल अंक x ध्वजांक

= 09 - 2 x 3 = 3

(iii) 3 ÷ 2 (मुख्यांक) से भागफल का दूसरा अंक = 1

तथा शेषफल = 1

क्षितिज रेखा के नीचे 2 के आगे भागफल का दूसरा अंक 1 लिखा तथा शेषफल 1 मध्य खण्ड में 2 के पहले और नीचे लिखा ।

नया भाज्य = 12   संशोधित भाज्य = 12 - 1 x 3 = 9

(iv) 9 ÷ 2 (मुख्यांक) से प्राप्त भागफल का तीसरा अंक = 4

क्षितिज रेखा के नीचे भागफल 21 के आगे लिखा ।

पुन: शेषफल 1 लिखा तृतीय खण्ड में 2 से पहले और नीचे।

(v) भागफल पूरा निकल चुका है परन्तु शेषफल निकालना है । यह शेषफल भी संशोधित भाज्य की तरह ज्ञात कीजिये।

शेषफल = 12 - 4 x 3 = 0 लिखा शेषफल में क्षितिज रेखा के नीचे।

भागफल = 214 तथा शेषफल = 0

उदाहरण : 23754 ÷ 74

7^4	2	3	${}_{2}7$	${}_{1}5$	${}_{0}4$
		3	2	1	0

क्रिया : (i) 23 ÷ 7, भागफल = 3, शेषफल = 2, नया भाज्य = 27

संशोधित भाज्य = 27 - 3 x 4 = 15

(ii) 15 ÷ 7, भागफल = 2, शेषफल = 1, नया भाज्य = 15

संशोधित भाज्य = 15 - 2 x 4 = 7

(iii) 7 ÷ 7, भागफल = 1, शेषफल = 0 नया भाज्य = 04

(iv) 04 - 1 x 4 = 0 = अन्तिम शेषफल

अत: भागफल = 321, शेषफल = 0

उदाहरण : 21112 ÷ 812

$$\begin{array}{c|ccc|cc} 8^{12} & 2 & 1 & {}_{5}1 & {}_{1}1 & {}_{1}2 \\ \hline & & 2 & 6 & 0 & \end{array}$$

<u>ध्यातव्य</u> :- इस पद्धति में एक समय पर एक ही अंक का पहाड़ा प्रयोग में आता है ।

क्रिया :(i) ध्वजांक = 12 अत: तृतीय खण्ड में भाज्य के दो अंक

(ii) 21÷8, भागफल=2, शेषफल=5 , नया भाज्य = 51
संशोधित भाज्य = 51-2x1 (ध्वजांक का पहला अंक)

(iii) 49÷8, भागफल = 6, शेषफल=1 , नया भाज्य= 11
संशोधित भाज्य

$= \text{नया भाज्य} - \begin{Bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{Bmatrix}$ { 26 व 12 का ऊर्ध्व तिर्यक्}

=11-10=1

(iv) 12 - 6 x 2 = 0 = शेषफल

अत: भागफल = 26, शेषफल = 0

<u>ध्यातव्य</u> (1) क्रिया पद (ii) में 2 और 1 का उध्र्व गुणन घटाया है, क्रिया पद (iii) में नये भाज्य में से 26 व 12 का तिर्यक् गुणन घटाया है और क्रिया पद (iv) में नये भाज्य में से 6 व 2 का ऊर्ध्व गुणन घटाया है।

(2) जब ध्वजांक में दो अंक होते हैं, तब ध्यातव्य (1) में वर्णित क्रियाएं करनी होती है।

उदाहरण : 32942÷732

$$\begin{array}{c|ccc|cc} 7^{32} & 3 & 2 & {}_{4}9 & {}_{2}4 & {}_{1}2 \\ \hline & & 4 & 5 & 2 & \end{array}$$

संकेत

(i) 32 ÷ 7, भागफल 4, शेषफल 4

(ii) नया भाज्य = 49

(iii) संशोधित भाज्य = 49 - 4 x 3 = 37

(iv) 37 ÷ 7, भागफल 5, शेषफल 2

(v) नया भाज्य = 24, संशोधित भाज्य = 24 - (5 x 3 + 4 x 2) = 1

(vi) 12 - 5 x 2 = 2 = शेषफल

भागफल = 45, शेषफल = 2

ध्यातव्य : क्रिया (v) में 45 व 32 का तिर्यक् गुणन तथा (vi) में ऊर्ध्व गुणन घटाया गया है।

उदाहरण : 19596522 ÷ 6122

6^{122}	1	9	${}_{1}5$	${}_{0}9$	${}_{1}6$	${}_{0}5$	${}_{0}2$	${}_{0}2$
		3	2	0	1	0		

संकेत

(i) 19÷6, भागफल 3, शेषफल 1

(ii) संशोधित भाज्य = 15-3×1=12

(iii) 12÷6, भागफल = 2, शेषफल = 0

(iv) संशोधित भाज्य = 9-(2 x 1+ 3 x 2) = 1

(v) 1÷6, भागफल = 0, शेषफल = 1, नया भाज्य = 16

(vi) संशोधित भाज्य = 16-(0 x 1 + 3 x 2 + 2 x 2) = 6

$\begin{Bmatrix} 320 \\ 122 \end{Bmatrix}$ का ऊर्ध्व तिर्यक्

(vii) 6÷6, भागफल=1, शेषफल = 0

(viii) 05 - (1 x 1 + 2 x 2 + 0 x 2) = 0

$\begin{Bmatrix} 201 \\ 122 \end{Bmatrix}$ का ऊर्ध्व तिर्यक्

02 - (1 x 2 + 0 x 2) = 0

02 - 1 x 2 = 0 शेषफल

भागफल = 3201, शेषफल = 0

ध्यातव्य (1) क्रिया (vi) में 3 2 0 का ऊर्ध्व तिर्यक् गुणन

x 1 2 2

(2) क्रिया (viii) में 201 और 122 का निर्यक् गुणन तथा 22 और 01 का निर्यक् गुणन तथा 1 और 2 का ऊर्ध्व गुणन किया ।

11.3.1 भाजक में 5 से बड़े अंक होने पर विनकुलम प्रयोग से उन्हें छोटे अंकों की संख्या में बदल दिया जाता है। ऐसा करने से भाग संक्रिया में आई हुई गुणन क्रियाएं सरल हो जाती हैं। देखिये निम्न उदाहरण :

उदाहरण : 98765 ÷ 87

87	9	$_{0}8$	$_{2}7$	$_{3}6$	$_{0}5$
$9\bar{3}$					
	1	1	3	5	20

संकेत

(i) 9÷9, भागफल 1, शेषफल = 0

(ii) $08 - 1 \times \bar{3} = 11$

(iii) 11÷9, भागफल = 1, शेषफल = 2

(iv) $27 - (1 \times \bar{3}) = 30$

(v) 30÷9, भागफल = 3, शेषफल = 3

(vi) $36 - 3 \times \bar{3} = 45$

(vii) 45÷9, भागफल = 5, शेषफल = 0

(viii) $05 - 5 \times \bar{3} = 20$ अन्तिम शेषफल

भागफल = 1135, शेषफल = 20

उदाहरण : 539124 ÷ 391

$4\bar{1}1$	5	$_{1}3$	$_{2}9$	$_{3}1$	$_{3}2$	$_{33}4$
	1	3	7	8	326	

संकेत 391 = 411

(i) 5÷4, भागफल = 1, शेषफल = 1

(ii) 13-1x1- = 14

(iii) 14 ÷ 4, भागफल 3, शेषफल 2

87

(iv) 29 - (3x1+1x1) = 31

(v) 31 ÷ 4, भागफल 7, शेषफल 3

(vi) 31 - (7x1+3x1) = 35

(vii) 35 ÷ 4, भागफल 8, शेषफल 3

(viii) 32- (8x1+7x1) = 33

(ix) 334-8x1 = 326 = शेषफल

भागफल 1378, शेषफल 326 ·

अभ्यासमाला 2

ध्वजांक विधि से भाग दीजिये।

(1) 1234567÷42

(2) 413251÷72

(3) 496372÷79

(4) 4532÷1112

(5) 3562÷1112

(6) 185416÷4312

(7) 21893÷68 (= $7\bar{2}$)

(8) 21015÷879 (= $9\bar{2}\bar{1}$)

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8
भागफल	29394	5739	6283	40	3	43	321	23
शेषफल	19	43	15	52	226	0	65	798

अध्याय 11

भाज्यता के नियम (Divisibility)

वैदिक गणित में अनेक विधियों द्वारा बिना भाग दिये यह ज्ञात किया जा सकता है कि किसी भी संख्या में किसी दूसरी संख्या का भाग पूरा पूरा दिया जाता है अथवा नहीं । ये विधियां भाज्यता के नियमों पर आधारित हैं । इन नियमों के प्रयोग से गुणनखण्ड, भाग आदि सम्बन्धी गणनाएँ सरल हो जाती हैं ।

11.1 संख्या 2 से भाज्यता का नियम :- जिस संख्या में इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 अथवा 8 हो तो वह संख्या 2 से पूरी विभाजित होती है जैसे 10 या 32 या 74 अथवा 106 या 108 आदि सभी संख्याएँ 2 से विभाज्य हैं । देखिये कि इनके इकाई अंक सम संख्याएँ हैं ।

11.2 संख्या 4 से भाज्यंता के नियम :- जिस संख्या में इकाई व दहाई अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित हो जाए तो वह पूरी संख्या 4 से विभाजित हो जाती है जैसे -

(i) 532 में इकाई व दहाई अंकों से बनी 32 संख्या 4 से विभाज्य है अत: संख्या 532 भी 4 से विभाज्य है ।

(ii) 6516 में इकाई व दहाई अंकों से बनी संख्या 16 संख्या 4 से विभाज्य है अत: संख्या 6516 भी 4 से विभाज्य है ।

11.3 संख्या 8 से भाज्यता का नियम :- जिस संख्या के इकाई, दहाई व सैकड़े अंकों से बनी संख्या 8 से विभाजित हो जाए तो दी हुई संख्या भी 8 से विभाज्य हो जाती है जैसे :-

(i) 78632 में इकाई, दहाई व सैकड़े के अंकों से बनी संख्या 632 संख्या 8 से विभाज्य है अत: संख्या 78632 भी 8 से विभाज्य है।

11.4 संख्या 3 अथवा 9 की भाजकता के नियम :- जिस संख्या के सभी अंकों का योग 3 अथवा 9 से विभाजित हो जाए तो वह पूरी संख्या भी क्रमश: 3 अथवा 9 से विभाजित हो जाती है जैसे -

(i) 234 के अंकों का योग = 2+3+4 = 9 जो 9 से विभाज्य है । अत: संख्या 234 भी 9 से विभाज्य है। जो संख्या 9 से विभाज्य होगी, वह 3 से भी विभाज्य होगी ।

(ii) 1416 के अंकों का योग = 1+4+1+6 = 12 जो 3 से विभाज्य है अत: 1416 भी 3 से विभाज्य है परन्तु 9 से नहीं।

(iii) 873 के अंकों का योग = 8+7+3 = 18 जो 9 से विभाज्य है अत: संख्या 873 भी 9 और 3 से विभाज्य है ।

11.5 संख्या 5 की भाजकता का नियम :- जिस संख्या में इकाई अंक 5 अथवा 0 हो तो वह संख्या 5 से पूरी पूरी विभाजित होती है जैसे 85 अथवा 120 संख्या 5 से विभाज्य है ।

11.6 संख्या 6 की भाजकता का नियम :- संख्या 3 से विभाजित होने वाली सम संख्या (अर्थात् जिसका इकाई अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो) संख्या 6 से भी विभाजित होती है जैसे :-

(i) 54 सम संख्या है तथा 5+4 = 9 संख्या 3, 9 से विभाज्य है, अत: संख्या 6 से भी विभाज्य है।

(ii) 96 सम संख्या है तथा 3 से विभाज्य है अत: 6 से विभाज्य।

11.7 संख्या 10 की भाजकता का नियम :- जिस संख्या में इकाई अंक 0 हो तो वह संख्या 10 से विभाज्य होती है जैसे 640 अथवा 7350

11.8 संख्या 7, 11 अथवा 13 की भाजकता का नियम :-

(i) संख्या की दाहिनी ओर से (इकाई अंक से) तीन तीन अंकों के समूह बनायें । दो से अधिक समूह बनें तो उन्हें सम स्थान अथवा विषम स्थान के अनुसार जोड़ लें ।

(ii) इनके योगों का अन्तर यदि

(क) 7 से विभाज्य हो तो पूरी संख्या 7 से विभाज्य होगी ।

(ख) 11 से विभाज्य हो तो पूरी संख्या 11 से विभाज्य होगी।

(ग) 13 से विभाज्य हो तो पूरी संख्या 13 से विभाज्य होगी।

उदाहरण (1) 325724683 की 7, 11, 13 से भाज्यता की जांच करें ।

683	724	योगों का अन्तर	1008
+ 325			- 724
------	-----		-----
1008	724		284
------	-----		-----

योग अन्तर 284 किसी भी संख्या 7 या 11 या 13 से विभाज्य नहीं अत: पूरी संख्या भी विभाज्य नहीं ।

उदाहरण (2) 325 728 683 की भाज्यता की जांच 7 से करें ।

683	728	योगों का अन्तर	1008
325			- 728
------			------
1008			280
------			------

280 संख्या 7 से विभाजित हो सकती है । अत: पूरी संख्या भी 7 से विभाजित हो सकती है ।

उदाहरण (3) 956 857 की भाज्यता की जांच 11 से करें ।

प्रथम समूह = 857 दोनों का अन्तर 956-857

द्वितीय समूह = 956 = 99

अंतर 99 संख्या 11 से विभाज्य है । अत: पूरी संख्या भी 11 से विभाज्य है ।

उदाहरण (4) 32396 की भाज्यता की जांच 7, 11 और 13 से करें ।

प्रथम समूह = 396 दोनों का अन्तर 396-32 = 364

दूसरा समूह = 32

364 संख्या 13 से विभाज्य है ।

संख्या 32396 संख्या 13 से विभाज्य है ।

364 संख्या 7 से विभाज्य है । अत: 32396 भी 7 से विभाज्य है ।

364 संख्या 11 से विभाज्य नहीं है । अत: दी हुई संख्या भी 11 से विभाज्य नहीं है ।

11.9.1 संख्या 11 की भाजकता का दूसरा नियम :- संख्या के सम और विषम स्थानों पर स्थित अंकों को जोड़ लीजिये । दोनों योगों का अन्तर यदि शून्य हो अथवा 11 से विभाज्य हो तो पूरी संख्या 11 से विभाज्य है ।

उदाहरण (1) 9563287866 की भाज्यता की जांच 11 से करें ।

प्रथम समूह = 6+8+8+3+5=30 इकाई की ओर से विषम स्थानों के अंक

दूसरा समूह = 6+7+2+6+9 = 30 सम स्थानों के अंक

दोनों योगो का अन्तर 30-30 = 0

अत: पूरी संख्या 11 से विभाज्य है ।

<u>ध्यातव्य</u> :- संख्या 11 की भाजकता का दूसरा नियम ही सरल और अधिक उपयोगी है ।

11.9.2 दो-दो अंकों के समूह द्वारा 11 की भाजकता :-

इकाई की ओर से दो-दो अंकों के समूह बना कर प्रत्येक समूह के नीचे 11 पर बांट कर शेष लिखें । सभी शेषों का जोड़ यदि 11 पर बंट जाए तो पूरी संख्या भी विभाज्य है । उदाहरण उपर्युक्त

95 63 28 78 66

7 8 6 1 0 = 7+8+6+1+0=22 जो 11 से विभाज्य है। अत: पूरी संख्या विभाज्य है ।

11.10 भाज्यता परीक्षण की सर्वव्यापक विधि (आश्लेषक विधि)

(1) इस विधि में भाजक का इकाई अंक 1 अथवा 9 होना चाहिए। जिस भाजक में इकाई अंक 1 अथवा 9 होना है, उसे प्रभावी भाजक कहते हैं ।

(2) यदि भाजक का इकाई अंक 1 अथवा 9 नहीं हो तो उसे ऐसी संख्या से गुणा करें कि गुणनफल प्रभावी भाजक बन जाए।
जैसे 7 x 3 = 21 अथवा 17 x 3 = 51
जैसे 7 x 7 = 49 अथवा 13 x 3 = 39

(3) प्रभावी भाजक को सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण अथवा सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से शून्यान्त संख्या में बदल दिया जाता है । शून्यान्त संख्या का शून्य हटाने पर जो अंक अथवा संख्या शेष बचती है उसे आश्लेषक कहते हैं । प्रभावी भाजक में इकाई 1 से प्राप्त आश्लेषक ऋणात्मक और इकाई 9 से प्राप्त आश्लेषक धनात्मक कहलाते हैं । यह आश्लेषक ही भाजकता परीक्षण के प्रयोग में आता है ।

उदाहरण :- प्रभावी भाजक=21, शून्यान्त संख्या=20 ऋणात्मक आश्लेषक=2
प्रभावी भाजक=41, शून्यान्त संख्या=40, ऋणात्मक आश्लेषक=4
प्रभावी भाजक=39, शून्यान्त संख्या=40, धनात्मक आश्लेषक=4
प्रभावी भाजक=49, शून्यान्त संख्या=50, धनात्मक आश्लेषक=5

(4) जिस संख्या के लिए भाज्यता का परीक्षण हो रहा है, उसके इकाई अंक को आश्लेषक से गुणा कर गुणनफल को संख्या के दहाई अंक में जोड़ा या घटाया जाता है ।
यदि आश्लेषक ऋणात्मक तो घटाना है ।
यदि आश्लेषक धनात्मक तो योग करना है ।
सम्पूर्ण विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है ।

उदाहरण (1) संख्या 1295 का 7 से भाज्यता का परीक्षण कीजिए ।

1295
-10

संकेत
(1) भाजक 7 के लिए प्रभावी भाजक = 21
(2) ऋणात्मक आश्लेषक = 2

```
 1 1 9
-1 8
------
  -7
```

(3) इकाई अंक 5x2=10, घटाया 129 में से
(4) शेषफल=119, 9×2=18, घटाया 11 में से
(5) शेषफल=-7 अत: पूरी संख्या विभाज्य 7 से

अथवा

```
  1 2 9 5
+   2 5
---------
  1 5 4
+ 2 0
------
  3 5
```

संकेत

(1) भाजक 7 के लिए प्रभावी भाजक 7x7= 49
(2) धनात्मक आश्लेषक = 5
(3) इकाई अंक 5×5=25, जोड़ा 129 में
(4) योगफल=154, 4×5=20, जोड़ा 15 में
(5) योगफल = 35 जो 7 से विभाज्य है, अत: पूरी संख्या भी 7 से विभाज्य है ।

ध्यातव्य (1) धनात्मक आश्लेषक + ऋणात्मक आश्लेषक = भाजक

(2) पिछले उदाहरण में कुछ गणनाएँ मौखिक कर लेने से प्रश्न का हल थोड़ा सा और छोटा हो सकता है । ऋणात्मक संख्याएँ विनकुलम रूप में लिखिए । ऋणात्मक आश्लेषक = 2 अत: आश्लेषक = $\bar{2}$

$1\ 2\ 9\ 5$

$\bar{7}\ 4\ \bar{1}$

(1) $5 \times \bar{2} = \bar{1}\,\bar{0},\ \bar{1}\,\bar{0} + 9 = \bar{1}$; इसे 9 के नीचे लिखा ।

(2) $\bar{1} \times \bar{2} = 2,\ 2+2 = 4$; इसे लिखा 2 के नीचे ।

(3) $4 \times \bar{2} = \bar{8};\ \bar{8}+1 = \bar{7}$ लिखा 1 के नीचे ।

(4) अन्तिम शेषफल = $\bar{7}$ अत: पूरी संख्या 7 से विभाजित है ।

इसी प्रकार धनात्मक आश्लेषक का उदाहरण

```
 1   2   9  5
28  25  34
```

संकेत

(1) धनात्मक आश्लेषक = 5
(2) इकाई अंक 5x5=25, 25+9 (दहाई अंक) = 34 लिखा 9 के नीचे
(3) (34 में इकाई का अंक = 4) 4x5=20, 20+3 (अर्थात् दहाई का अंक) = 23,

23+2=25 लिखा 2 के नीचे

(4) (25 की इकाई = 5) 5×5=25, 25+2=27, 27+1=28 लिखा 2 के नीचे

(5) अन्तिम योगफल = 28 जो 7 से विभाज्य है । अत: पूरी संख्या 7 से विभाज्य ।

उदाहरण (2) 14833 का संख्या 13 से भाज्यता का परीक्षण कीजिए ।

हल 13x3=39, अत: भाजक 13 का धनात्मक आश्लेषक = 4

```
 14833
  +12
------
  1495
 + 20
------
  169
 + 36
------
  52
+  8
------
 13
```

हल II

1	4	8	3	3
13	42	29	15	

अथवा

हल III

1	4	8	3	3
13	16	16	15	
	+13	+13	+13	
	--	--	--	
	+3	+3	+2	
	--	--	--	

<u>ध्यातव्य</u> :- नीचे लिखी जाने वाली संख्या यदि भाजक से बड़ी है तो भाजक अथवा उसका गुणज घटायें और शेषफल से आगे क्रिया करें ।

अध्याय 12

महत्तम समापवर्तक

दो या दो से अधिक संख्याओं का सबसे बड़ा अपवर्तक (गुणनखण्ड) ही उनका महत्तम समावर्तक कहलाता है । इसका संकेत म०स० है। म०स० ज्ञात करने की प्रचलित दो विधियों में से एक गुणनखण्ड विधि अच्छे स्तर के छात्रों के लिये है, अत: इस विधि पर सामान्य छात्र का निर्भर रहना उचित नहीं । दूसरी भाग की विधि यन्त्रवत्, लम्बी और अधिक समय लगाने वाली है । वैदिक गणित की विधि उपरोक्त सभी दोषों से मुक्त है । सरल, कम समय लेने वाली तथा विश्वसनीय है। यह विधि वैदिक गणितीय सूत्र संकलन-व्यवकलन पर आधारित है ।

12.1 विधि के सिद्धान्त :-

1. दो संख्याओं का योग अथवा उनका अन्तर उनके महत्तम समापवर्तक का गुणज होता है । माना P, Q दो संख्याएँ तथा H = म०स०
   यदि $P = HA$ तथा $Q = HB$ तो $P \pm Q = H(A \pm B)$

2. यदि दो संख्याओं का अन्तर छोटी संख्या के तुल्य होता है तो यह छोटी संख्या ही म०स० होती है । यदि $P-Q=Q$ तो $Q=H$

3. दो संख्याओं से प्राप्त क्रमबद्ध अन्तरों के अन्तर (न्यूनतम एवं परस्पर समान) ही महत्तम समापवर्तक के तुल्य होते हैं ।

4. विभिन्न गणनाओं से प्राप्त अनेक अन्तर (शेषफल) यदि परस्पर तुल्य हों तो वह अन्तर ही म०स० होता है ।

5. दो से अधिक संख्याओं का म०स० ज्ञात करना हो तो कोई दो संख्याओं के योग में से तीसरी संख्या घटा देते हैं । यह शेषफल तीनों संख्याओं का म०स० का गुणज होता है । प्रयास यह रहे कि शेषफल न्यूनतम हो ।

   यदि $P=HA$, $Q=HB$ तथा $R=HC$ तो $P \pm Q-R=H(A \pm B-C)$

   इसी प्रकार $lP + mQ - nR = H(Al + Bm - Cn)$

गुणक l,m,n के मान इस प्रकार चुनें कि $Al+Bm-Cn$ का मान न्यूनतम आए ।

विधि (1) बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाइये । यह शेषफल ही प्रथम अन्तर है ।

(2) दूसरा अन्तर प्राप्त करने के विभिन्न क्रिया पद :-

1. दूसरा अन्तर = छोटी संख्या — प्रथम अन्तर
2. अथवा = छोटी संख्या का गुणज — प्रथम अन्तर
3. = प्रथम अन्तर का गुणज — छोटी संख्या
4. अन्त में उत्तर म०स० का सत्यापन करना उत्तम रहता है । निम्न उदाहरणों से विधि को स्पष्ट किया जा रहा है ।

उदाहरण (1) 95 व 57 का म०स० ज्ञात करें।

संख्याओं का प्रथम अन्तर = 95-57 = 38, अत: म०स०≤38

ध्यान दें, म०स० को 38 से छोटा होना है तो यह 38 का अपवर्तक ही होगा अर्थात् 19, 2, 1 में से कोई होगा ।

संख्याओं का दूसरा अन्तर 57x2-95 विधि (2)(ii) से

=114-95 = 19 अत: म०स०≤19

तीसरा अन्तर = 38-19 = 19 अत: म०स०=19

उदाहरण (2) 70 व 42 का म०स० ज्ञात करें ।

प्रथम अन्तर = 70-42 = 28, अत: म०स०≤28

दूसरा अन्तर = 42-28 = 14 विधि (2)(i) से, अत: म०स०≤14

तीसरा अन्तर = 28-14 = 14 अत: म०स० = 14

उदाहरण (3) 145 व 232 का म०स० ज्ञात करें ।

प्रथम अन्तर = 232-145 = 87, अत: म०स० ≤ 87

दूसरा अन्तर = 87 x 2 -145 विधि (2) (iii) से,

= 174 -145 = 29 अत: म०स० ≤ 29

तीसरा अन्तर = 87-29x2

= 87-58 = 29 अत: म०स० = 29

उदाहरण (4) 156 व 221 का म०स० ज्ञात कीजिए ।

प्रथम अन्तर = 221 - 156 = 65, अत: म०स० ≤ 65

दूसरा अन्तर = 156 - 65x2 विधि (2) (iii) से,

= 156 - 130 = 26 अत: म०स० ≤ 26

तीसरा अन्तर = 65 - 26x2 विधि (3) से

= 65 - 52 = 13 अत: म०स० ≤ 13

चौथा अन्तर = 26 - 13 = 13 अत: म०स० = 13

उदाहरण (5) 238 व 255 का म०स० ज्ञात कीजिए ।

प्रथम अन्तर = 255 - 238 = 17, अत: म०स० ≤ 17

दूसरा अन्तर = 238-17x4 विधि (2) (iii) से,

= 170

= 17 का गुणज अत: म०स० 17

उदाहरण (6) 48, 64 व 80 का म०स० ज्ञात करें ।

प्रथम अन्तर = 64 - 48 = 16

दूसरा अन्तर = 80 - 64 = 16

तीसरा अन्तर = 48x2-80 = 16 विधि (iii) से

अत: म०स० = 16

उदाहरण (7) 671, 781 तथा 1430 का म०स० ज्ञात करें ।

संकलन-व्यवकलन से प्रथम अंतर = 671 + 781 - 1430

= 1452 - 1430 = 22 अत: म०स० ≤ 22

671 अथवा 781 संख्या 22 या 2 से विभाजित नहीं अत: 22 से छोटा अपवर्तक = 11 म०स० = 11

उदाहरण (8) वह बड़ी से बड़ी संख्या बताइये जिससे संख्याएँ 49, 59 तथा 109 में से क्रमश: 1, 3, 5 घटाने पर प्राप्त शेषफल पूरा-पूरा विभाजित हो जाए ।

संख्याओं में से 1, 3, 5 घटाने पर शेषफल हुए

49 - 1 = 48, 59 - 3 = 56, 109 - 5 = 104

शेषफलों का म०स० ज्ञात करना है ।

प्रथम अन्तर = 56-48 = 8 अत: म०स० ≤ 8

दूसरा अन्तर = 56 x 2-104 = 8

दोनों अन्तर समान हैं । अत: म०स० = 8

अभ्यासमाला

(1) 165, 231, 99 (2) 84, 60

(3) 475, 675 (4) 117, 195 व 156

(5) 266, 456 व 190 (6) 26, 39 व 65

(7) 315, 405, 585 (8) 364, 468, 624

उत्तरमाला

(1) 33 (2) 12 (3) 25

(4) 39 (5) 38 (6) 13

(7) 45 (8) 52

अध्याय 13

भिन्न

सामान्यत: भिन्नों का क्रम, योग तथा व्यवकलन ज्ञात करने के लिए तुल्य भिन्न का उपयोग किया जाता है परन्तु वैदिक गणित में सूत्र ''ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्'' के प्रयोग से इन्हें सफलतापूर्वक ज्ञात किया जाता है ।

13.1 भिन्न क्रम :-

1. यदि दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान हों तो जितना बड़ा अंश हो उतनी बड़ी भिन्न जैसे : $\frac{5}{8} > \frac{4}{8} > \frac{3}{8}$

2. यदि दी हुई भिन्नों के अंश परस्पर समान हों तो जितना बड़ा हर हो उतनी छोटी भिन्न जैसे : $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$

3. यदि दी हुई भिन्नों के अंश तथा हर सभी अलग-अलग हों तो वैदिक गणित से सूत्र उर्ध्व-तिर्यक पर आधारित तिर्यक गुणन के प्रयोग से उनका क्रम निश्चित किया जा सकता है ।

(i) जिस भिन्न का तिर्यक गुणनफल बड़ा, वह भिन्न बड़ी ।

(ii) जिन भिन्नों के तिर्यक गुणनफल समान, वे भिन्न बराबर या तुल्य।

उपरोक्त सम्पूर्ण संक्रिया निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण : $\frac{3}{4}$ व $\frac{4}{5}$ में बड़ी भिन्न बताइये ।

संकेत

(i) तिर्यक गुणनफल बने 5x3=15 तथा 4x4 = 16

(ii) जो तिर्यक गुणनफल बड़ा, वह भिन्न बड़ी

(iii) 15<16 अत: $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

अभ्यासमाला 1

निम्न भिन्नों के मध्य सही चिह्न लगायें (>,=,< में से एक)

(1) $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{9}$ (2) $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{10}$ (3) $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{7}$

(4) $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$

निम्न भिन्नों को आरोही क्रम में लिखिए :-

(6) $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ (7) $\frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{5}$

भिन्नों को अवरोही क्रम में लिखिए :-

(8) $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ (9) $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$

सरल रूप में लिखें :-

(10) $\frac{4}{12}$ (11) $\frac{6}{9}$ (12) $\frac{5}{20}$

उत्तरमाला

(1) > (2) > (3) < (4) < (5) =

(6) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ (7) $\frac{4}{8}, \frac{4}{7}, \frac{4}{6}, \frac{4}{5}$ (8) $\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$

(9) $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}$ (10) $\frac{1}{3}$ (11) $\frac{2}{3}$ (12) $\frac{1}{4}$

ध्यातव्य :- अधिक है का चिह्न > तथा कम है का चिह्न < सावधानी से लगाएं ।

13.2 भिन्नों का योग

1. यदि भिन्नों के हर परस्पर समान हों तो

भिन्नों का योग = $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$ जैसे $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$

2. यदि दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हैं । और उनमें

कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड भी नहीं हैं तो इन भिन्नों का योग ऊर्ध्व तिर्यक द्वारा बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है ।

सूत्र आधारित विधि -भिन्नों का योग = $\dfrac{\text{तिर्यक गुणनफलों का योग}}{\text{हरों का गुणनफल}}$

विधि को निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया जा रहा है ।

उदाहरण : योग कीजिए $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}$

$= \dfrac{2\times5+3\times4}{3\times5}$ संकेत

$= \dfrac{10+12}{15}$ (i) बनने वाले तिर्यक गुणन 2x5 तथा 3x4

$= \dfrac{22}{15}=1\dfrac{7}{15}$ (ii) हरों का गुणनफल = 3x5=15

उदाहरण : योग कीजिए $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}$

$$= \frac{1\times3\times5+2\times2\times5+4\times2\times3}{2\times3\times5}$$

$$= \frac{15+20+24}{30}=\frac{59}{30}=1\frac{29}{30}$$

संकेत

(i) तिर्यक गुणन 1x3x5 तथा 2x2x5 तथा 4x2x3 हैं ।
एक के हर को छोड़कर अन्य हरों से गुणा(अन्य भी ऐसे ही)

(ii) हरों का गुणनफल = 2x3x5=30

13.3 मिश्र भिन्नों का योग : मिश्र भिन्नों का योग भी वैदिक गणित सूत्र विलोकनम् तथा तिर्यक गुणन के प्रयोग से ज्ञात किया जा सकता है ।

उदाहरण :- योग कीजिए $1\frac{3}{4}+2\frac{1}{3}$

संकेत

$=1+\frac{3}{4}+2+\frac{1}{3}$

(i) विलोकनम् सूत्र से मिश्र भिन्न के दो टुकड़े करें

$=3+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$

$=3+\frac{3\times3+1\times4}{4\times3}$

$1\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}$ तथा $2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$

$=3+\frac{13}{12}=3+1\frac{1}{12}$

(ii) 1+2=3 तथा $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ पूर्व विधि से करें।

$=4\frac{1}{12}$

(iii) दोनों का योग = उत्तर ।

(iv) सामान्य रीति में $1\frac{3}{4}$ व $2\frac{1}{3}$ को $\frac{7}{4}$ व $\frac{7}{3}$ में बदल कर इनका जोड़ करते हैं। फिर उत्तर को मिश्र भिन्न में परिवर्तित करते हैं।

<u>ध्यातव्य</u> :- यदि कक्षा में लघुतम समापवर्त्य का पाठ पढ़ा दिया गया है तो उपरोक्त विधि के स्थान पर हरों का ल०स० कर भिन्नों का योगफल ज्ञात किया जा सकता है ।

अभ्यासमाला 2

योग कीजिए

1. $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}$
2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$
3. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$
4. $\frac{1}{2}+\frac{2}{9}$
5. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$
7. $3\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}$
8. $4\frac{1}{4}+3\frac{1}{5}$

उत्तरमाला

1. $\frac{5}{9}$ 2. $\frac{7}{10}$ 3. $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

4. $\frac{13}{18}$ 5. $\frac{47}{60}$ 6. $\frac{53}{30} = 1\frac{23}{30}$

7. $5\frac{5}{6}$ 8. $7\frac{9}{20}$

3.3 भिन्नों का व्यवकलन

भिन्नों की व्यवकलन संक्रिया भिन्नों के योग की क्रिया से मिलती-जुलती है ।

यदि हर परस्पर समान तो भिन्नों के व्यवकलन में

$$\text{शेषफल} = \frac{\text{अंशों का अन्तर}}{\text{हर}}$$

यदि दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हों तो भिन्नों का

$$\text{व्यवकलन} = \frac{\text{तिर्यक गुणनफलों का अन्तर}}{\text{हरों का गुणनफल}}$$

मिश्र भिन्नों का व्यवकलन योग संक्रिया के समान सूत्र विलोकनम् और तिर्यक गुणन के प्रयोग से भी निकाला जा सकता है । कभी-कभी मिश्र भिन्नों का व्यवकलन इन्हें साधारण भिन्नों में बदलकर ज्ञात करना सुविधाजनक होता है ।

उदाहरणों से उपरोक्त नियम स्पष्ट किए जा रहे हैं :-

उदाहरण : $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$

उदाहरण : $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3 - 2 \times 5}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$

उदाहरण : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{1x3x5+1x2x5-1x2x3}{2x3x5}$

$= \frac{15+10-6}{30} = \frac{19}{30}$

उदाहरण : $3\frac{3}{4}-3\frac{2}{5}$

$= 3+\frac{3}{4}-3-\frac{2}{5} = \frac{3}{4}-\frac{2}{5} = \frac{3\times5-2\times4}{4\times5} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$

उदाहरण : $3\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}$

$= \frac{7}{2}-\frac{7}{4}$

संकेत

$= \frac{7x4-2x7}{2x4}$

(i) $\frac{3}{4}$ अधिक है $\frac{1}{2}$ से

$= \frac{28-14}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

अतः साधारण भिन्नों में बदल कर हल करें।

$= 1\frac{3}{4}$

(ii) $\frac{14}{8}$ का सरलतम रूप $= \frac{7}{4}$

अन्य विधि : $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ अतः $\frac{3}{4}$ का पूरक $\frac{1}{4}$ जोड़ें और पूर्व अंक 1 का एकाधिक करें ।

$3\frac{1}{2}-1\frac{3}{4} = 3+\frac{1}{2}-2+\frac{1}{4} = 3-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$= 1+\frac{2}{4}+\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$ $\left[\because \frac{1}{2} = \frac{2}{4}\right]$

अभ्यासमाला 3

1. $\frac{19}{5}-\frac{4}{5}$ 2. $\frac{5}{8}-\frac{1}{8}$ 3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ 5. $2\frac{5}{6}-2\frac{1}{6}$ 6. $2\frac{3}{4}-1\frac{2}{5}$

उत्तरमाला

1. $\frac{15}{5}=3$ 2. $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ 3. $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

4. $\frac{23}{60}$ 5. $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 6. $\frac{7}{20}$

अध्याय 14

बीजगणित परिचय

14.1 बीजगणित परिचय :-

वर्णमाला के अक्षर को 'बीज' कहा जाता है, जैसे रोमन वर्णमाला के $a, b, c,$- - - - - $x, y, z,$ A, B, C - - - - आदि ।
देवनागरी के
क, ख, ग - - - - य, र, ल, अ, आ - - - आदि ।
संख्याओं के स्थान पर इन बीजों का उपयोग जो गणित करता है, वह बीजगणित है ।

14.2 बीजगणित की कुछ विशेषताएँ :-

(1) सभी संख्याओं में उपलब्ध विशेषता को बीजगणितीय पद्धति से व्यक्त किया जा सकता है, जैसे $a+b=b+a$ (क्रम विनिमेय नियम)

(2) किसी प्रश्न में अज्ञात संख्या के स्थान पर कोई अक्षर प्रयोग कर दी गई सूचनाओं के आधार पर वह अक्षर किस संख्या के लिए प्रयुक्त हुआ है, वह संख्या प्राप्त की जा सकती है । यह समीकरण साधन में किया जाता है ।

(3) निश्चित परन्तु अनेक अंकों या अनन्त अंकों की संख्या के लिये भी अक्षर का प्रयोग होता है, जैसे e, π

इन तीनों ही कल्पनाओं को, आचार्य बन्धु छात्रों के स्तर के अनुसार क्रमशः दें ।

14.3 बीज-अक्षर :-

किसी अंक के स्थान पर अक्षर (बीज) उपयोग में लिया जाय तो वह अक्षर बीज-अक्षर कहलाता है ।

14.4 बीजीय कथन :-

जब किसी कथन को बीजीय रूप में व्यक्त किया जाता है तो वह बीजीय कथन कहलाता है । जैसे

कथन: किसी संख्या में वही संख्या जोड़ने पर उस संख्या का दो गुना होता है ।

बीजीय कथन :- $a+a=2a$

14.5 पद :

अक्षरों और संख्याओं के गुणन एवं भाग से बनी हुई राशि 'पद' कही जाती है । सबसे छोटा पद वह होगा जिसमें केवल एक अक्षर या एक संख्या हो । जैसे: -

(क) x एक पद है, जिसमें एक अक्षर का प्रयोग हुआ है ।

(ख) $2xy$ एक पद है । यह 2, x और y का गुणक है ।

(ग) $\frac{xy^2}{x}$ एक पद है । यह x, y, y को गुणा कर x से भाग देने से बना है ।

(घ) $x+2$ एक पद नहीं है । इसमें दो पद हैं, एक x और दूसरा 2 । कारण यह है कि $x+2$ में गुणा और भाग के अतिरिक्त '+' का प्रयोग हुआ है ।

14.6 समान और असमान पद :-

जिन पदों में अक्षर और उनके घात समान हों, वे समान पद कहलाते हैं । ऐसा नहीं होने पर वे पद असमान पद कहे जाते हैं ।

(क) $5x, \frac{1}{2}x, -\frac{9}{11}x$ समान पद हैं ।

(ख) $6y^3, \frac{1}{6}y^3, -\frac{1}{3}y^3$ समान पद हैं ।

(ग) $3x^2y, 12x^2y, x^2y$ समान पद हैं ।

(घ) $\frac{1}{3}p^2q^3r, \frac{1}{3}pq^3, \frac{1}{3}p^2q^3r^2, 2x^2y^2z$ में कोई भी पद किसी दूसरे पद के समान नहीं है । ये असमान पद हैं ।

14.7 घात :-

किसी पद की सभी बीज-अक्षरों की घातों को जोड़ने पर, पद की घात प्राप्त होती है । ध्यान दें कि किसी बीज अक्षर पर कोई घात न लिखी हो तो घात 1 होती है । और बीज अक्षर के

बिना संख्या की घात 0 होगी । जैसे x^2y की घात $2+1 = 3$ है।

x^2+9x+5 में, पहले पद x^2 की घात 2, दूसरे पद $9x$ की 1 तथा अन्तिम पद की घात 0 है ।

किसी व्यंजक की घात भी होती है । यह उस व्यंजक में उपस्थित पदों में से सब से बड़ी घात वाले पद की घात के बराबर होगी। जैसे व्यंजक x^2+4x+5 में बड़ी घात का पद x^2 है, जिसकी घात 2 है, अत: पूरे व्यंजक की घात भी 2 होगी।

अध्याय 15

बीजीय संकलन व्यवकलन

15.1 संकलन :- बीजीय व्यंजकों की योग संक्रिया में समान पदों को निश्चित स्तम्भों में लिखकर स्तम्भ अनुसार जोड़ दिया जाता है। असमान पदों के योग में पदों को उनके मूल चिह्न सहित एक साथ लिख दिया जाता है । विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है ।

उदाहरण :- योग कीजिए $2x - 3y + 4z$, $x + 2y - z$ तथा $3z - x - y$

x	y	z	संकेत
2	-3	4	(i) पद x, y, z अनुसार तीन स्तम्भों की रचना
1	2	-1	(ii) पदों के गुणांक स्तम्भशः लिखना ।
-1	-1	3	(iii) गुणांकों का स्तम्भशः योग करना ।
-----------			(iv) प्रत्येक योग में स्तम्भ पद लिख कर व्यंजक का रूप देना ।
2	-2	+6	

उत्तर $= 2x - 2y + 6z$

उदाहरण :- योग कीजिए $2a^3 - 3a^2 + a + 5$, $3a^3 + 5a - 2$, $a^2 + 2a + 3$

a^3	a^2	a^1	a^0	संकेत
2	-3	1	5	
3	0	5	-2	(i) $a^1 = a$ तथा $a^0 = 1$ (a रहित पद) ।
0	1	2	3	(ii) सभी गुणांक योग चिह्न सहित लिखें ।
5	-2	+8	+6	

उत्तर :- $5a^3 - 2a^2 + 8a + 6$

उदाहरण :- योग कीजिए $2x^2y^2z, \frac{1}{4}xy^2z^2$ तथा $-\frac{1}{2}xyz^2$

ये सभी पद असमान हैं अतः कोई स्तम्भ न बनाकर इन सभी पदों को चिह्न सहित जोड़ देना चाहिए ।

उत्तर :- $2x^2y^2z + \frac{1}{4}xy^2z^2 - \frac{1}{2}xyz^2$ । थोड़ा अभ्यास हो जाने पर उत्तर एक पंक्ति में लिखा जा सकता है ।

अभ्यासमाला 1

योग कीजिए :-

(1) $3a$, $2a$ तथा $-a$

(2) $5a + 9b$, $-a - b$

(3) $3a^2 + 5a$, $2a^2 + 2a$

(4) $7p^3 + 8p^2$ तथा $5p^3 - p^2$

(5) $abc + a^2$, $2abc + b^2$

(6) $a^3 + a^2 - 2$, $3a^2 - a^3$

(7) $7(x+y) + 8(x^2-y^2)$ तथा $-5(x+y) + 3(x^2-y^2)$
{संकेत :- $(x + y)$ तथा $(x^2 - y^2)$ को स्तम्भ पद मानें}

(8) $x^3 - 5x^2 + x + 2$ तथा $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

(9) $y^6 - 3y^4$ तथा $y^4 + y^3 + 2y^2 - 6$

(10) $3x^2 + 5x - 2$ तथा $-3x^2 - 5x + 6$

उत्तरमाला

(1) $4a$ (2) $4a + 8b$ (3) $5a^2 + 7a$
(4) $12p^3 + 7p^2$ (5) $a^2 + b^2 + 3abc$ (6) $4a^2 - 2$
(7) $11(x^2-y^2)+2(x+y)$ (8) $2x^3-8x^2+3x+3$
(9) $y^6-2y^4+y^3+2y^2-6$ (10) 4

15.2 व्यवकलन :- व्यवकलन संक्रिया योग संक्रिया की परावर्त्य संक्रिया है । अत: जिस संख्या को घटाना है, उसके चिह्न पलट देते हैं । अर्थात् (+) को (-) में तथा (-) को (+) में बदल देते हैं । तथा उन्हें जोड़ देते हैं। देखिए निम्न उदाहरण :-

$3x^3+4x^2+8x+9$ में से $x^3+9x+10$ घटाएं ।

x^3	x^2	x^1	x^0
3	4	8	9
-1	0	-9	-10
2	4	-1	-1

शेषफल : $2x^3+4x^2-x-1$

संकेत

(i) व्यंजकों के गुणांकों को स्थान के क्रम (स्तम्भों) में रखें ।

(ii) घटाई जाने वाली संख्या के गुणांकों के चिह्न बदल दें ।

(iii) पूर्व विधि से योग करें ।

उदाहरण :- $x^3 - 3x^2 + 6$ में से $x^2 - x + 4$ घटाइये

x^3	x^2	x^1	x^0
1	-3	0	6
0	+1	-1	+4
	-	+	-

(परावर्त्य योजयेत् सूत्र से)

1	-4	+1	+2

शेषफल :- $x^3 - 4x^2 + x + 2$

अभ्यासमाला 2

(1) $y^3 - 3y^2 + y + 2$ में से $y^3 + 2y + 1$ घटाइये ।

(2) $t^4 - 3t^3 + 2t + 6$ में से $t^4 - 3t^2 - 6t + 2$ घटाइये ।

(3) $x^3 - 3x^2 + 4$ में से $2x^2 - 3x - 3$ घटाइये ।

(4) $x^3 - x - 7$ में से $y^3 + y - 9$ घटाइये ।

उत्तरमाला

(1) $-3y^2 - y + 1$

(2) $-3t^3 + 3t^2 + 8t + 4$

(3) $x^3 - 5x^2 + 3x + 7$

(4) $x^3 - y^3 - x - y + 2$

अध्याय 16

बीजीय गुणन

16.1 निखिलम् सूत्र से :- निखिलम् सूत्र में बीजीय व्यंजक के किसी भी पद को आधार माना जा सकता है । विचलन ज्ञात करना और शेष क्रिया अंकगणित के ही समान है । निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट किया जा रहा है ।

उदाहरण :- $(x+3)\,(x+4)$ को सरल कीजिए ।

$x+3 \quad +3$

$x+4 \quad +4$

$= x(x+3+4)/3\times4$

$= x(x+7)/12$

$= x^2+7+12$

संकेत

(i) आधार x के सापेक्ष विचलन $+3$ तथा $+4$

(ii) गुणनफल के वाम पक्ष में आधार x का गुणा करने पर ही उसका स्थानीय मान प्राप्त होता है ।

उदाहरण :- $(x+4y)(x+5y)$

$x+4y \quad +4y$

$x+5y \quad +5y$

$= x(x+4y+5y)/20y^2$

$= x(x+9y)+20y^2$

$= x^2+9xy+20y^2$

आधार x, विचलन $4y$ और $5y$

उदाहरण :- $(x+y+z)(x+y-z)$

$x+y+z \quad +z$

$x+y-z \quad -z$

$= (x+y)(x+y+z-z)/z(-z)$

$= (x+y)(x+y)-z^2$

$= (x+y)^2-z^2$

आधार $= x+y$

ध्यातव्य गुणनफल के वाम पक्ष में आधार का गुणा करना आवश्यक है ।

16.2 ऊर्ध्व तिर्यक् विधि :- बीजीय व्यंजकों के प्रत्येक गुणा में यह सूत्र उपयोगी है । विधि अंकगणित के समान है । देखिये निम्नलिखित उदाहरण -

उदाहरण :- $(5x+3)\,(x+4)$

$=$ $5x$ $5x$ 3 $+3$

↑ ╳ ↑

x x 4 $+4$

$= 5x^2+(20x+3x)+12$

$= 5x^2+23x+12$

संकेत

(i) दो स्तम्भ बने

(ii) दो उर्ध्व व एक तिर्यक जोड़ा

(iii) ऊर्ध्व गुणनफल हुए $+12$ तथा $5x^2$

(iv) तिर्यक जोड़े से प्राप्त गुणनफल $= 20x+3x$

उदाहरण :- $(2x+3y)(2x-3y)$

$=$ $2x$ $+3y$

$2x$ $-3y$

$= 4x^2+(6xy-6xy)-9y^2$

$= 4x^2-9y^2$

उदाहरण :- $(x+2y+3z)(x+y-z)$

x $2y$ $+3z$

x y $-z$

$= -3z^2+(-2yz+3yz)+(-zx+3zx+2y^2)+(xy+2xy)+x^2$

$= x^2+3xy+2y^2+2zx+yz-3z^2$

अभ्यासमाला

निखिलम् सूत्र से गुणा कीजिए :-

(1) $(2x+3)(2x+5)$

(2) $(x+2y)(x+4y)$

(3) $(x^2+3x+2)(x^2+3x+2)$

(4) $(x-y+z)(x-y-z)$

ऊर्ध्व तिर्यक् सूत्र से गुणा कीजिए :-

(5) $(2x+3)(x+2)$

(6) $(x+4y)(4x+y)$

(7) $(5x^2+3x+2)(x+3)$

(8) $(x^2-4x+4)(x+2)$

(9) $(3x^2+2x+1)(2x^2+x+3)$

(10) $(x^2+x+1)(x^2-x-1)$

उत्तरमाला

(1) $4x^2+16x+15$

(2) $x^2+6xy+8y^2$

(3) $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$

(4) $x^2-2xy+y^2-z^2$

(5) $2x^2+7x+6$

(6) $4x^2+17xy+4y^2$

(7) $5x^3+18x^2+11x+6$

(8) x^3-2x^2-4x+8

(9) $6x^4+7x^3+13x^2+7x+3$

(10) x^4-x^2-2x-1

अध्याय 17

बीजीय भाग

17.1 सूत्र परावर्त्य योजयेत्

1. बीजीय व्यंजकों के भाग के लिए परावर्त्य सूत्र का अनुप्रयोग बहुत सरल है । अंकगणित में दी गई पूर्व विधि के समान ही निर्धारित स्थान को तीनों खण्डों में भाजक, परावर्तित अंक, भाज्य आदि लिखकर भाग संक्रिया की जाती है । विधि निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है ।

उदाहरण (1) $7x^2-5x+3$ को $x+1$ से भाग कीजिए ।

भाजक	$x+1$	$7x^2$	$-5x$	$+3$
परावर्तित अंक	-1	7	-5	3
			-7	12
		7	-12	+15

भागफल = $7x-12$ शेषफल = 15

संकेत (i) केवल बीज (अक्षर) रहित गुणांक लिखें ।

(ii) पूर्व विधि समान संक्रिया पूरी करें ।

(iii) अब उत्तर में गुणांकों को बीज सहित लिखें ।

x गुणांक 7 के साथ ।

x रहित पद (-12) ।

भागफल = $7x-12$, शेषफल = 15

उदाहरण (2) $x^3+2x+12$ को $x+2$ से भाग दीजिए ।

x+2	$1.x^3$ +	$0.x^2$ +	$2x$	+ 12
-2	1	0	2	12
		-2		
			4	
				-12
	1	-2	6	0

भागफल = x^2-2x+6 शेषफल 0

सकेत

(i) व्यंजक में $0.x^2$ अपने क्रम पर लिखें ।

(ii) बीज रहित गुणांक लिखकर संक्रिया पूरी की ।

(iii) उत्तर में गुणांकों को बीज सहित लिखे ।

x^2 लिखा गुणांक 1 के साथ

x लिखा गुणांक -2 के साथ

6 रहेगा x रहित पद

उदाहरण (3) $x^4-2x^3+3x^2+4x+5$ को x^2-x+1 से भाग दीजिए।

x^2-x+1	x^4	$-2x^3$	$+3x^2$	$+4x$	$+5$
+1 -1	1	-2	+3	+4	+5
		+1	-1		
			-1	+1	
				+1	-1
	1	-1	+1	6	4

भागफल $= x^2-x+1$, शेषफल $= 6x+4$

उदाहरण (4) $2x^2+11x+14$ को $2x+3$ से भाग दीजिए ।

$2x+3$	$2x^2$	$+11x$	$+14$
$x+3/2$	2	11	14
-3/2		-3	
			-12
	2	+8	2
	1	+4	2

भाजक $2x+3$ में 2 का भाग देकर ताकि $x+3/2$ प्राप्त हो ।

भागफल में 2 का भाग दें क्योंकि भाजक को ½ से गुणा किया था । परन्तु शेष में भाग नहीं देना है ।

भागफल $= x+4$, शेषफल $= 2$

<u>ध्यातव्य</u> :-भाजक में किसी संख्या का भाग देने पर यदि भागफल में भी उसी संख्या से भाग दें तो उत्तर में कोई अन्तर नहीं पड़ता है। प्रत्येक अवस्था में शेषफल सदैव समान रहता है ।

उदाहरण (5) $36x \div 4 = 9x$ (i)

मानो $36x$ और 4 को 2 से भाग दिया,

तो $36x \div 2 = 18x$ और $4 \div 2 = 2$

भागफल $= 18x \div 2 = 9x$ (ii)

(i) और (ii) समान हैं ।

अभ्यासमाला

परावर्त्य सूत्र से भाग दीजिए :-

(1) x^2+4x+4 को $x+2$ से

(2) $2x^2-3x+5$ को $x-1$ से

(3) $4x^3-3x^2+2x+4$ को $x-2$ से

(4) x^3+5x^2+3x+2 को $x+3$ से

(5) $x^3-3x^2+4x-12$ को $x-3$ से

(6) $x^3+x^2+3x+175$ को $x+5$ से

उत्तरमाला

प्र०क्र०	भागफल	शेषफल
(1)	$x+2$	0
(2)	$2x-1$	4
(3)	$4x^2+5x+12$	28
(4)	x^2+2x-3	11
(5)	x^2+4	0
(6)	$x^2-4x+23$	60

अध्याय 18

बीजीय गुणनखण्ड

18.1 विलोकनम् सूत्र :

घातीय व्यंजकों के प्रारम्भिक गुणनखण्ड करने में वैदिक गणित के सूत्र 'विलोकनम्' तथा सर्वनिष्ठ समुच्चय आदि बड़े उपयोगी हैं । निम्नलिखित उदाहरणों से उनका अनुप्रयोग स्पष्ट किया जा रहा है ।

उदाहरण :- $ax+ay+bx+by$ **के गुणनखण्ड कीजिए ।**

	संकेत
$ax+ay+bx+by$	
$= (ax+ay)+(bx+by)$	(i) सूत्र विलोकनम् -कोई अवयव
$= a(x+y)+b(x+y)$	उभयनिष्ठ नहीं ।
$= (x+y)(a+b)$	(ii) व्यंजक के दो भाग

(iii) इनमें उभयनिष्ठ अवयव क्रमशः a तथा b

(iv) a तथा b से बना सर्वनिष्ठ समुच्चय

(v) $(x+y)$ हुआ सर्वनिष्ठ अतः गुणांक समुच्चय = गुणनखण्डों का समुच्चय $= (x+y)(a+b)$

18.2 द्विघाती त्रिपदी व्यंजकों के गुणनखण्ड (निखिलम् सूत्र का विलोम)

प्रकार :- x^2+bx+c

पिछले अध्याय में हम अध्ययन कर चुके हैं कि निखिलम् विधि में दो गुणनखण्डों के गुणा में उनके विचलनों की बड़ी महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है । देखिए निम्न उदाहरण :-

	आधार x के सापेक्ष विचलन
(i) $(x+4)(x+3) = x^2+7x+12$	(i) +4 तथा +3
(ii) $(x-4)(x-2) = x^2-6x+8$	(ii) -4 तथा -2
(iii) $(x+3)(x-2) = x^2+x-6$	(iii) +3 तथा -2
(iv) $(x-6)(x+5) = x^2-x-30$	(iv) -6 तथा +5

उपरोक्त गुणनफलों का विश्लेषण करने पर निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं :-

(i) गुणनफल एक त्रिपदी व्यंजक है जिसमें सबसे बड़ा और पहला पद x^2 है तथा जिसका गुणांक 1 है ।

(ii) दूसरा मध्य पद x का है जिसका गुणांक विचलनों का योग अथवा अन्तर है ।

(iii) तीसरा पद स्वयं x रहित पद है जो विचलनों का गुणनफल है।

अत: उपरोक्त बिन्दुओं को ध्यान में रखते हुए तथा निखिलम् विधि की विलोम विधि अपनाते हुए त्रिपदी व्यंजनों का गुणनखण्ड किया जा सकता है ।

निखिलम् सूत्र की विलोम विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है -

उदाहरण (1) $x^2+9x+14$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

$x^2+9x+14$

$= x(x+9)+14$

$= x(x+7+2)\ /\ 7\times2$

$= x+7 \quad +7$

$\ \ \ x+2 \quad +2$

$= (x+7)(x+2)$ उत्तर

संकेत

(i) x रहित पद=दोनों विचलनों का गुणा = 14

(ii) संभावित जोड़े (14,1) तथा (7, 2)

(iii) विचलनों का योग = 9 अत: सही जोड़ा (7, 2)

(iv) निखिलम् रूप में रखा ।

(v) अत: दो गुणनखण्ड स्पष्ट हैं।

उदाहरण (2) $x^2+5x-24$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

$x(x+5)-24$

$= x(x+8-3)/8\text{x}(-3)$

$= x+8 \quad 8$

$\ \ \ x-3 \quad -3$

$= (x+8)(x-3)$

संकेत

(i) x रहित पद=-24 अत: एक विचलन धन तथा दूसरा ऋण

(ii) मध्य पद का गुणांक +5 अत: बड़ा विचलन धन होगा

(iii) संभावित जोड़े(1,24), (2,12), (3,8) तथा (4, 6)

(iv) अत: सही विचलनों का जोड़ा (+8, -3)

(v) शेष क्रिया पूर्व विधि समान

उदाहरण (3) $p^2-12pq-64q^2$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

$p^2-12pq-64q^2$
$= p(p-12q)-64q^2$
$= p(p-16q+4q)/(-16q)(4q)$
$= (p-16q)(p+4q)$

संकेत

(i) आधार = p, विचलन q में
(ii) विलोकनम् से, बड़ा विचलन ऋण छोटा विचलन धन होगा
(iii) संभावित जोड़े (1, 64), (2, 32), (4, 16), (8, 8) सभी q में
(iv) सही जोड़ा $(-16q, +4q)$

अभ्यासमाला 1

गुणनखण्ड कीजिए :-

(1) $x^2+ax+bx+ab$
(2) x^3-3x^2+3x-9
(3) $a^2+a+ab+b+ac+c$
(4) $abx-cdx-ab+cd$
(5) $x^2+7x+10$
(6) $x^2+10x+21$
(7) x^2+6x-7
(8) $x^2+9x-36$
(9) $x^2-8x-48$
(10) $x^2-15x+50$

उत्तरमाला

(1) $(x+a)(x+b)$
(2) $(x^2+3)(x-3)$
(3) $(a+1)(a+b+c)$
(4) $(ab-cd)(x-1)$
(5) $(x+2)(x+5)$
(6) $(x+3)(x+7)$
(7) $(x+7)(x-1)$
(8) $(x+12)(x-3)$
(9) $(x-12)(x+4)$
(10) $(x-5)(x-10)$

ध्यातव्य :- आधार और विचलन ज्ञात होने पर व्यंजक के गुणनखण्ड निम्न संकेत से मौखिक ज्ञात किए जा सकते हैं ।

व्यंजक = (आधार + प्रथम विचलन) (आधार + द्वितीय विचलन)

18.3 सूत्र संकलनव्यवकलनाभ्याम्

प्रकार :- $a^2 - b^2$

जब द्विघाती समजातीय व्यंजक का मध्यपद अथवा x का गुणांक

शून्य होता है जब व्यंजक के गुणनखण्ड के लिए संकलन-व्यवकलन विधि का प्रयोग सुविधाजनक रहता है । निम्न उदाहरणों से विधि स्पष्ट की जा रही है :-

उदाहरण :- $49x^2$-$36y^2$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

$= 7x(7x)/6y(-6y)$ — संकेत

$= 7x(7x+6y-6y)/6y(-6y)$ — (i) दो विचलनों का गुणा $= -36y^2$

$= 7x+6y \quad +6y$ — (ii) आधार $= 7x$

$7x-6y \quad -6y$ — (iii) मध्य पद $= 0$ अत: विचलन

$= (7x+6y)(7x-6y)$ — $+6y$ तथा $-6y$ रखना ।

(iv) कोष्ठक में $7x$ के साथ विचलनों के रूप में $+6y$ तथा $-6y$ रखना।

(v) निखिलम् विलोम क्रिया पूरी करना ।

ध्यातव्य :- जब बीजीय व्यंजक दो वर्गों के अन्तर के रूप होता है उसके गुणनखण्ड तुरन्त एक पंक्ति में संकलन-व्यवकलन विधि से लिखे जा सकते हैं । व्यंजक = (आधार+विचलन) (आधार-विचलन)

उदाहरण :- $9a^2$-$16b^2$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

$9a^2 - 16b^2$ — संकेत

$= (3a+4b)(3a-4b)$ — आधार $= 3a$ तथा

विचलन $= +4b, -4b$

अभ्यासमाला 2

(1) $4x^2-9y^2$ (2) $16p^2-25q^2$ (3) $25x^2-1$

(4) x^3-x (5) $2x^2-18y^2$ (6) $16x^2-\dfrac{1}{16x^2}$

(7) $(x+y)^2-z^2$ (8) $(a+b)^2-9z^2$ (9) $(5a+3b)^2-16c^2$

मान ज्ञात करें :-

(10) 40^2-25^2 (11) 1001^2-999^2 (12) 100^2-99^2

(13) $66\text{x}66 - 34\text{x}34$ (14) $.231^2-.069^2$ (15) 375^2-125^2

उत्तरमाला

(1) $(2x+3y)(2x-3y)$ (2) $(4p+5q)(4p-5q)$

(3) $(5x+1)(5x-1)$ (4) $x(x+1)(x-1)$

(5) $2(x+3y)(x-3y)$ (6) $\left(4x+\frac{1}{4x}\right)\left(4x-\frac{1}{4x}\right)$

(7) $(x+y+z)(x+y-z)$ (8) $(a+b+3z)(a+b-3z)$

(9) $(5a+3b+4c)(5a+3b-4c)$ (10) $65.15=975$

(11) 4000 (12) 199

(13) 3200 (14) .0486 (15) 125000

18.4 गुणनखण्ड (सूत्र आनुरूप्येण)

18.4.1 द्विघाती त्रिपदी व्यंजक के गुणनखण्ड में मध्यपद के दो भाग इस प्रकार किए जाते हैं कि :-

व्यंजक का प्रथम पद : मध्य पद का प्रथम भाग

= मध्य पद का दूसरा भाग : व्यंजक का अन्तिम पद

इस विधि को आनुरूप्येण विधि (अनुपात विधि) कहा जाता है। विधि को निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है ।

उदाहरण (1) $9x^2+17x+8$ के गुणनखण्ड कीजिये ।

$9x^2+17x+8$	(i) $17x$ के दो भाग $9x$ तथा $8x$
$= 9x^2+9x+8x+8$	क्योंकि $9x^2 : 9x = x : 1$
$= 9x(x+1)+8(x+1)$	$8x : 8 = x : 1$
$= (x+1)(9x+8)$	(ii) अत: विभाजन सत्यापित हुआ

उदाहरण (2) $12y^2+7y-12$ के गुणनखण्ड कीजिये ।

	संकेत
$12y^2+7y-12$	(i) आनुरूप्येण संकेत के अनुसार $7y$
$= 12y^2+16y-9y-12$	के दो भाग बने $+16y$ तथा $-9y$
$= 4y(3y+4)-3(3y+4)$	(ii) $12y^2 : 16y = 3y : 4$ और
$= (3y+4)(4y-3)$ उत्तर	$-9y : -12 = 3y : 4$
	(iii) अत: विभाजन सत्यापित ।

अभ्यासमाला 3

गुणनखण्ड कीजिए :-

(1) $2x^2+3x+1$ (2) $4x^2+15x+9$ (3) $10x^2+21x+9$

(4) $6a^2+10a-4$ (5) $7a^2+8a-12$ (6) $2x^2-7x-30$

(7) $6x^2-13x-15$ (8) $3x^2-16x+16$ (9) $6x^2-39x+18$

उत्तरमाला

(1) $(2x+1)(x+1)$ (2) $(4x+3)(x+3)$ (3) $(2x+3)(5x+3)$

(4) $2(3a-1)(a+2)$ (5) $(a+2)(7a-6)$ (6) $(x-6)(2x+5)$

(7) $(x-3)(6x+5)$ (8) $(3x-4)(x-4)$ (9) $3(2x-1)(x-6)$

ध्यातव्य - x^2+bx+c प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड भी आनुरूप्येण विधि से किए जा सकते हैं । देखिए अभ्यास माला I के प्रश्न क्रमांक 5 से 10 तक ।

18.4 शेषफल प्रमेय (*Remainder Theorem*) का अनुप्रयोग

हम जानते हैं कि व्यंजक (भाज्य) = भाजक x भागफल + शेषफल

यदि भाजक$=(x-a)$ और शेषफल$=0$ हो तो

व्यंजक$=(x-a)$ x भागफल (2)

जहाँ $x-a$ और भागफल दोनों ही व्यंजक के गुणनखण्ड हैं। समीकरण (2) में यदि x का मान a रखने पर व्यजंक $= 0$ हो जाये तो $x-a$ व्यंजक का गुणनखण्ड होता है । यही शेषफल प्रमेय है। निम्नलिखित उदाहरणों से इस विधि को स्पष्ट किया जा रहा है ।

उदाहरण (1) x^2+5x+6 का एक गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ।

व्यजंक $= x^2+5x+6$

$x=-1$, रखने पर

व्यंजक $= (-1)^2+5(-1)+6$

$= 1-5+6 \neq 0$

अत: $(x+1)$ व्यंजक का गुणनखण्ड नहीं है ।

$x=-2$ रखने पर

व्यंजक $= (-2)^2+5(-2)+6$

$= 4-10+6=0$

अत: $x+2$ व्यंजक का एक गुणनखण्ड है ।

(i) x रहित पद 6 के सर्व सम्भव गुणनखण्ड $\pm1, \pm2, \pm3$ तथा ±6 हुए

(ii) व्यंजक x^2+5x+6 में कहीं भी ऋण का चिह्न नहीं है, अत: x का धन मान रखने पर व्यंजक शून्य हो ही नहीं सकता ।

(iii) $x=-1$ रखने पर व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए ।

(iv) इसी प्रकार $x=-2$ रखने पर व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए।

(v) व्यंजक का एक गुणनखण्ड ज्ञात करने पर शेष गुणनखण्ड इस विधि से न निकाल कर दूसरी सरल विधियों से निकालना सीखेंगे ।

उदाहरण (2) $x^3+6x^2+11x+6$ का एक गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ।

हल :- 6 के सर्वसम्भव गुणनखण्ड = $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$; व्यंजक के सभी पद धनात्मक हैं अत: x का मान धन नहीं होगा ।

$x = -1$, रखने पर

व्यजंक $= (-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6$

$= -1+6-11+6=0$

अत: $x+1$ एक गुणनखण्ड है।

<u>ध्यातव्य</u> (1) व्यंजक में सभी पद धन चिह्नों से जुड़े हुए हैं । अत: x का धनात्मक मान मानने पर व्यंजक कभी शून्य नहीं होगा । अत: ऐसी स्थिति में प्रारम्भ से ही x का मान ऋणात्मक मानिए।

(2) सर्वसम्भव गुणनखण्डों में से कोई भी लेकर जांचा जा सकता है ।

व्यंजक में $x=-2$ रखने पर

व्यंजक $= (-2)^3+6(-2)^2+11(-2)+6= -8+24-22+6=0$

अत: x+2 एक गुणनखण्ड हुआ। सभी गुणनखण्ड इस विधि से न निकालिए।

18.4.1 सूत्र आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन का अनुप्रयोग

सूत्र का अर्थ है कि प्रथम को प्रथम से तथा अन्तिम को अन्तिम से। व्यंजक का एक गुणनखण्ड ज्ञात करने के पश्चात् इस सूत्र का प्रयोग प्रारम्भ होता है । व्यंजक का प्रथम पद सबसे बड़े घातांक वाला पद है।

व्यंजक के प्रथम पद में गुणनखण्ड के प्रथम पद से भाग दें। इसी प्रकार से व्यंजक के अन्तिम पद अर्थात् बीज (x) रहित पद में निकाले गए गुणनखण्ड के अन्तिम पद अर्थात् बीज (x) रहित पद का भाग दें। इस तरह से प्राप्त दोनों भागफलों का योग व्यंजक का दूसरा गुणनखण्ड होगा अथवा दूसरे गुणनखण्ड का कोई एक खण्ड होगा । सूत्र प्रयोग निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है -

उदाहरण (1) व्यंजक x^2+5x+6 का एक गुणनखण्ड $x+2$ है । दूसरा ज्ञात कीजिए ।

सूत्र के पहले भाग ''आद्यमाद्येन'' के अनुसार पहला खण्ड

$\frac{x^2}{x}=+x$ तथा दूसरा खण्ड $\frac{6}{2}=+3$ ''अन्त्यमन्त्येन'' के अनुसार होगा । अतः दूसरा गुणनखण्ड हुआ $x+3$

<u>ध्यातव्य</u> :- (1) सूत्र के मौखिक प्रयोग से भी दूसरा गुणनखण्ड ज्ञात किया जा सकता है ।

(2) कभी-कभी दूसरा गुणनखण्ड परावर्त्य विधि द्वारा भाग देकर भी निकाला जा सकता है । दूसरा गुणनखण्ड = व्यंजक ÷ पहला गुणनखण्ड; देखिए निम्नलिखित उदाहरण -

उदाहरण (2) $x^3+6x^2+11x+6$ का एक गुणनखण्ड $x+1$ है । शेष गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ।

$x+1$	x^3 +	$6x^2$ +	$11x$	+ 6
-1	1	6	11	6
		-1		
			-5	
				-6
	+1	+ 5	+6	0

$= x^2+5x+6$

अतः व्यंजक $= (x+1)(x^2+5x+6)$

$= (x+1)(x+2)(x+3)$

उदाहरण (3) $x^3+6x^2+11x+6$ का एक गुणनखण्ड $x+1$ है । शेष गुणनखण्ड सूत्र आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन की सहायता से ज्ञात कीजिए।

सूत्र विलोकनम् से व्यंजक के दूसरे खण्ड में तीन पद होंगे । इसका प्रथम और तीसरा पद सूत्र आद्यमाद्येन तथा अन्त्यमन्त्येन से $\frac{x^3}{x}=x^2$ तथा $\frac{6}{1}=6$ प्राप्त होंगे और मध्य का पद x युक्त होगा। मध्य के पद को एक अन्य उपसूत्र गुणितसमुच्चयः के प्रयोग से ज्ञात किया जा सकता है । अब तक की जानकारी के अनुसार :-

$x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x^2+....x+6)$

$x=1$ रखने पर, $24 = 2(1+...+6)$ अत: मध्य पद का गुणांक 5 होने पर ही दोनों पक्ष समान होंगे । मध्य पद $= 5x$

व्यंजक $= (x+1)(x^2+5x+6)$

$= (x+1)(x+2)(x+3)$

18.4.2 आनुरूप्येण विधि

यदि किसी त्रिघाती अथवा उच्चघाती व्यंजक का एक गुणनखण्ड ज्ञात हो तो आनुरूप्येण से उस व्यंजक के शेष गुणनखण्ड भी बड़ी सरलता से ज्ञात किये जा सकते हैं । विधि को निम्नलिखित उदाहरणों से समझाया जा रहा है ।

उदाहरण (1) व्यंजक x^3-6x+4 का एक गुणनखण्ड $x-2$ है । व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए ।

		संकेत
	x^3-6x+4	
=	$x^3-4x-2x+4$	(i) x रहित पद से क्रिया प्रारम्भ करें
=	$x^3-2x^2+2x^2-4x-2x+4$	(ii) गुणनखण्ड $x-2$ लाने हेतु 4 से पूर्व $-2x$ चाहिए । अत: $-6x$ को दो खण्डों में लिखा $-4x-2x$
=	$(x^3-2x^2)+(2x^2-4x)-(2x-4)$	
=	$x^2(x-2)+2x(x-2)-2(x-2)$	
=	$(x-2)(x^2+2x-2)$	(iii) गुणनखण्ड $x-2$ लाने हेतु $-4x$ से पूर्व $+2x^2$ चाहिए । अत: $+2x^2$ भी जोड़ा (द्वितीय पंक्ति) क्योंकि व्यंजक में x^2 नहीं है। इसलिए $-2x^2+2x^2$ लिखना पड़ेगा

(iv) $-2x^2$ को x^3 के साथ रखा जो गुणनखण्ड $x-2$ भी देगा ।

(v) इस प्रकार आनुरूप्येण विधि से सभी पदों को योग्य अनुपातों में बांट दिया जो $x-2=$ गुणनखण्ड देते हैं।

उदाहरण (2) व्यंजक $x^3+12x^2+44x+48$ का एक गुणनखण्ड $x+2$ है। व्यंजक के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ।

	$x^3+12x^2+44x+48$	संकेत
=	$x^3+12x^2+20x+24x+48$	(i) $44x$ के दो भाग $= 20x+24x$
=	$x^3+2x^2+10x^2+20x+24x+48$	(ii) $12x^2$ के दो भाग $= 2x^2+10x^2$
=	$x^2(x+2)+10x(x+2)+24(x+2)$	
=	$(x+2)(x^2+10x+24)$	
=	$(x+2)(x+4)(x+6)$	निखिलम् सूत्र से ।

<u>ध्यातव्य</u> :- यदि x रहित पद से क्रिया प्रारम्भ न कर पद x^2 से प्रारम्भ करनी हो तो भी आनुरूप्येण विधि से व्यंजक के गुणनखण्ड ज्ञात किये जा सकते हैं । देखिए अगला उदाहरण

उदाहरण (3) यदि व्यंजक $x^3+9x^2+23x+15$ का एक गुणनखण्ड $x+1$ हो तो व्यंजक के सूत्र आनुरूप्येण से गुणनखण्ड कीजिए ।

	$x^3+9x^2+23x+15$	संकेत
=	$x^3+x^2+8x^2+23x+15$	(i) $x+1$ गुणनखण्ड के लिये x^3 के साथ x^2 लिखें अत: $9x^2=x^2+8x^2$ (पंक्ति 1)
=	$x^3+x^2+8x^2+8x+15x+15$	
=	$(x^3+x^2)+(8x^2+8x)+(15x+15)$	
=	$x^2(x+1)+8x(x+1)+15(x+1)$	(ii) $8x^2$ के साथ $8x$ अत: $23x=8x+15x$ (पंक्ति 2)
=	$(x+1)(x^2+8x+15)$	
=	$(x+1)(x+3)(x+5)$	(iii) $15x+15$ भी $x+1$ गुणनखण्ड देगा ।

उत्तर की जांच : व्यंजक के गुणांकों का जोड़ = 48
गुणनखण्डों के गुणांक जोड़कर गुणा किया = 2x4x6=48
अत: उत्तर ठीक है ।

उदाहरण (4) व्यंजक $x^3+x^2+15x+175$ का एक गुणनखण्ड $x+5$ हो तो व्यंजक के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए (सूत्र आनुरूप्येण से) ।

$x^3+x^2+15x+175$
$= x^3+5x^2-4x^2+15x+175$
$= (x^3+5x^2)-4x^2-20x+35x+175$
$= (x^3+5x^2)-(4x^2+20x)+(35x+175)$

$= x^2(x+5)-4x(x+5)+35(x+5)$

$= (x+5)(x^2-4x+35)$

18.5 विचलन विधि

हम जानते हैं समीकरण

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c) = x^3+(a+b+c)\ x^2+(ab+bc+ca)\ x+abc$$

में a,b,c आधार x के सापेक्ष विचलन हैं । अत: किसी भी त्रिघाती व्यंजक के पद और विचलनों में निम्न सम्बन्ध होगा।

(i) x रहित पद = तीनों विचलनों का गुणनफल ।

(ii) x^2 का गुणांक = तीनों विचलनों का योग ।

(iii) x का गुणांक = दो दो विचलनों के गुणनफलों का योग

उपरोक्त सम्बन्धों के आधार पर तर्क देते हुए किसी भी व्यंजक के गुणनखण्ड किये जा सकते हैं । विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है ।

उदाहरण (1) $x^3+8x^2+19x+12$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

x रहित पद 12 विचलनों का गुणनफल है । अत: इसके तीन-तीन संख्याओं (विचलनों) के समूह किये :- (1, 1, 12), (1,2,6), (1,3,4) और (2, 2, 3)

व्यंजक में तीनों विचलनों का योग =8 है । इसे केवल समूह (1,3,4) सन्तुष्ट करता है । इसी समूह में 1x3+3x4+1x4 =19 जो x के गुणांक को सन्तुष्ट करता है ।

अत: $x^3+8x^2+19x+12 = (x+1)(x+3)(x+4)$

जाँच : दोनों पक्षों में x=1 रखने पर 40 =2x4x5 अत: उत्तर सत्यापित हुआ।

अभ्यासमाला 4

शेषफल प्रमेय तथा आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन सूत्र से गुणनखण्ड कीजिए और जांच भी कीजिए ।

(1) x^3-x+6 (2) x^2+4x-5 (3) x^2-5x+6

आनुरूप्येण विधि से गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ।

(4) x^3-5x^2+8x-4, एक गुणनखण्ड = $x-2$

(5) $x^3+8x^2+19x+12$, एक गुणनखण्ड = $x+1$

विचलन विधि से गुणनखण्ड कीजिए ।

(6) $x^3+4x^2-11x-30$

(7) $x^3+4x^2-17x-60$

(8) $x^3+9x+24x+16$

(9) $x^3+7x^2+14x+8$

उत्तरमाला

(1) $(x+2)(x^2-2x+3)$

(2) $(x+5)(x-1)$

(3) $(x-3)(x-2)$

(4) $(x-2)^2(x-1)$

(5) $(x+1)(x+3)(x+4)$

(6) $(x+2)(x+5)(x-3)$

(7) $(x+5)(x-4)(x+3)$

(8) $(x+1)(x+4)^2$

(9) $(x+1)(x+2)(x+4)$

18.6 सूत्र पूरणापूरणाभ्याम्

सूत्र का अर्थ है ''पूर्ण एवं अपूर्ण से'' अर्थात् व्यंजक में दिये हुए दो या दो से अधिक पदों से पूर्ण वर्ग या पूर्ण घन आदि बना कर शेष पदों का समायोजन करते हुए गुणनखण्ड करना । विधि उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है ।

उदाहरण (1) a^3+b^3 के गुणनखण्ड कीजिए

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

अत: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$

$=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

संकेत

a^3+b^3 को पूर्णघन में समायोजित कर आगे गुणनखण्ड कीजिए ।

उदाहरण (2) x^2+5x+6 के गुणनखण्ड कीजिए

$(x+2)^2 = x^2+4x+4$

$x^2+4x=(x+2)^2-4$

व्यंजक x^2+5x+6

$= x^2+4x+x+6 = (x+2)^2-4+x+6$

$= (x+2)^2+(x+2)$

$= (x+2)(x+2+1)$

$= (x+2)(x+3)$

संकेत

(i) $x+2$ का वर्ग लेकर चलिए

उदाहरण (3) $a^3+b^3+c^3-3abc$ के गुणनखण्ड कीजिए

व्यंजक $= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

संकेत

(i) a^3+b^3 का मान

$= (a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)$ पूर्णघन में रखने पर

$-3ab(a+b+c)$ (ii) $(a+b)^3+c^3$ को

$= (a+b+c)[(a+b+c)^2-3c(a+b)-3ab]$ पूर्णघन में रखने पर

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3ac-3bc-3ab)$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

<u>ध्यातव्य</u> :- जब व्यंजक $a^3+b^3+c^3-3abc$ के मानक रूप में हो तो दाहिने पक्ष के अनुसार गुणनखण्ड सीधे लिखें ।

उदाहरण (4) $a^3+8b^3+27c^3-18abc$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

व्यंजक $= (a)^3+(2b)^3+(3c)^3-3.(a)(2b)(3c)$

$= (a+2b+3c)\{(a)^2+(2b)^2+(3c)^2-2ab-3ac-6bc\}$

$= (a+2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2-2ab-3ac-6bc)$

संकेत

(i) व्यंजक को मानक रूप में रखिए ।

(ii) गुणनखण्ड सीधे लिखिए ।

उदाहरण (5) $x^3+6x^2+11x+6$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

$(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$

अतः $x^3+6x^2 = (x+2)^3-12x-8$

व्यंजक $= (x+2)^3-12x-8+11x+6$

$= (x+2)^3-(x+2)$

$= (x+2)\{(x+2)^2-1\}$

$= (x+2)(x+1)(x+3)$

संकेत

(i) x^3+6x^2 को पूर्णघन में बदलने पर ।

(ii) शेष पदों का समायोजन करने पर

(iii) मौखिक रूप से $(x+2)^2-1 = (x+2-1)(x+2+1)$

अन्य पद्धति :-

$a+b+c = 1+2+3=6$ (x^2 का गुणांक)

$abc = 1\text{x}2\text{x}3=6$ (x^0 का गुणांक)

$ab+bc+ca=11$ (x का गुणांक)

इसलिए विलोकनम् से गुणनखण्ड लिख सकते हैं ।

$(x+1)(x+2)(x+3)$

उदाहरण (6) $x^3+9x^2+23x+15$ के गुणनखण्ड कीजिए ।

हम, जानते हैं कि

$(x+3)^3 = x^3+9x^2+27x+27$

अत: $x^3+9x^2=(x+3)^3-27x-27$

व्यंजक $= (x+3)^3-27x-27+23x+15$

$= (x+3)^3-4x-12$

$= (x+3)^3-4(x+3)$

$= (x+3)\{(x+3)^2-2^2\}$

$= (x+3)(x+1)(x+5)$

उपरोक्त उदाहरण के अनुसार यहां भी विलोकनम् से गुणनखण्ड लिखे जा सकते हैं ।

अभ्यासमाला 5

गुणनखण्ड कीजिए (सूत्र पूरणापूरणाभ्याम्)

(1) $x^3-6x^2+11x-6$

(2) $x^3+6x^2-37x+30$

(3) $x^3+8x^2+17x+10$

(4) $x^3+10x^2+27x+18$

उत्तरमाला

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)$

(2) $(x-1)(x-3)(x+10)$

(3) $(x+1)(x+2)(x+5)$

(4) $(x+1)(x+3)(x+6)$

अध्याय 19

बीजगणित में महत्तम समापवर्तक

19.1 सूत्र लोपनस्थापनाभ्याम्

बीजगणित में महत्तम समापवर्तक (म०स०) ज्ञात करने की वैदिक विधि, 'लोपनस्थापनाभ्याम्' सूत्र पर आधारित है । यह विधि प्रचलित सभी विधियों से सरल एवं उपयोगी है ।

विधि : इस विधि में व्यंजकों के उच्चतम एवं लघुतम घातों का लोप आवश्यकतानुसार मूलभूत संक्रियाओं, योग, व्यवकलन, गुणा एवं भाग की सहायता से किया जाता है । विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है ।

उदाहरण (1) x^2+7x+6 तथा x^2-5x-6 का म०स० ज्ञात कीजिये ।

संकलन x^2+7x+6 व्यवकलन x^2+7x+6

एवं x^2-5x-6 एवं x^2-5x-6

$2x\,)\,2x^2+2x\,(\,x+1$ $12\,)\,12x+12\,(\,x+1$

योगफल $= 2x(x+1)$ शेषफल $= 12(x+1)$

दोनों क्रियाओं में $x+1$ है । अत: म०स० $x+1$ हुआ है ।

उदाहरण (2) $x^3+3x^2-4x-12$ तथा $x^3+7x^2+16x+12$ का म०स० ज्ञात कीजिए ।

संकलन $x^3+3x^2-4x-12$ व्यवकलन $x^3+3x^2-4x-12$

एव $x^3+7x^2+16x+12$ एवं $x^3+7x^2+16x+12$

$2x^3+10x^2+12x$ $-4x^2-20x-24$

$=2x(x^2+5x+6)$ $=-4(x^2+5x+6)$

अत: म०स० x^2+5x+6 है ।

उदाहरण (3) $4x^3+13x^2+19x+4$ तथा $2x^3+5x^2+5x-4$ का म०स० निकालिए ।

व्यवकलन $4x^3+13x^2+19x+4$ संकलन $4x^3+13x^2+19x+4$

एवं $4x^3+10x^2+10x-8$ एवं $2x^3+5x^2+5x-4$

लोपन $3 \overline{)3x^2+9x+12(} x^2+3x+4$ लोपनं $6x \overline{)6x^3+18x^2+24x(} x^2+3x+4$

अत: म०स० x^2+3x+4 हुआ ।

अभ्यासमाला 6

निम्नलिखित व्यंजकों का म०स० ज्ञात कीजिए ।

(1) $6x^4-11x^3+16x^2-22x+8$ तथा $6x^4-11x^3-8x^2+22x-8$

(2) $2x^3+x^2-9$ तथा x^4+2x^2+9

(3) $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$ तथा $3x^4+7x^3+18x^2+7x+5$

(4) $x^3+5x^2+10x+8$ तथा x^3+x^2-2x-8

उत्तरमाला

(1) $6x^2-11x+4$

(2) x^2+2x+3

(3) x^2+2x+5

(4) x^2+3x+4

अध्याय 20

सरल समीकरण

20.1 परिचय :-

हम जानते हैं कि बीजीय पद अथवा बीजीय पदों का पद-समूह जिसमें मूलभूत संक्रियायें +, -, ÷, ×, आदि प्रयोग में लायी जाती हैं, बीजीय कथन अथवा बीजीय व्यंजक कहलाता है। जैसे $4x-9$ अथवा x^2+5x+6 आदि। जब यह बीजीय व्यंजक समानता का भाव प्रदर्शित करता है तो वह समीकरण कहलाता है। जैसे:-

(i) $4x-9=0$, (ii) $6x=12$ (iii) $x^2+5x+6=0$ (iv) $x^2+x=25$

x की सबसे बड़ी घात एक होने के कारण समीकरण (i) तथा (ii) एकघाती समीकरण कहलाता है, तथा x की सबसे बड़ी घात 2 होने पर समीकरण (iii) तथा (iv) द्विघाती समीकरण कहलाता है।

20.1.1 समीकरण निर्माण :-

दी हुई संख्या के तथ्यों से समीकरण निर्माण करने की विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण (1) **एक अज्ञात संख्या के दो गुने में से 3 कम करने पर 17 प्राप्त होता है। समीकरण बनाएं ।**

माना कि अज्ञात संख्या $= y$

संख्या का दो गुना $= y \times 2 = 2y$

दो गुने में 3 कम करने पर मान $= 2y-3$

यह मान $= 17$

अत: समीकरण हुआ, $2y-3=17$

उदाहरण (2) **एक अज्ञात संख्या का छठा भाग 7 है, समीकरण बनाएं ।**

माना कि संख्या $= x$

उसका छठा भाग $= x \times \frac{1}{6} = \frac{x}{6}$

प्रश्नानुसार समीकरण बना $\frac{x}{6} = 7$

20.2 समीकरण के सामान्य गुण :-

समीकरण की तुलना भार तौलने के काम आने वाली तुला से की जा सकती है। समानता का संकेत-चिह्न '=' यह दरसाता है कि दोनों पलड़े सन्तुलित स्थिति में हैं, अर्थात् दोनों पक्ष बराबर हैं।

जैसे तुला के दोनों पलड़ों में कोई समान भार रख दें अथवा उनमें से कोई समान भार निकाल लें, तो तुला के सन्तुलन में अंतर नहीं पड़ता, वैसे ही समीकरण के दोनों पक्षों में कोई संख्या जोड़ने अथवा घटाने से समीकरण में कोई अन्तर नहीं आता ।

जैसे :-

$x + 2 = 5$

$x + 2 + 3 = 5 + 3$

दोनों समीकरणों से x का मान एक समान ही आता है।

इसी प्रकार समीकरण के दोनों पक्षों में किसी समान शून्येतर संख्या का गुणा अथवा भाग करने पर भी समीकरण में कोई अन्तर नहीं आता ।

समीकरण के सामान्य गुणों को 'परावर्त्य योजयेत्' सूत्र के द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है अर्थात् पद का पक्ष परावर्तित करने पर या पद का पक्षान्तर करने पर पद के चिह्न भी परावर्तित करें, अर्थात चिह्न $\pm$ को $\mp$ में बदल दें, उसी प्रकार x व $\div$ को क्रमशः $\div$ व x में बदल दें। समीकरण के सामान्य गुण निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किये जा रहे हैं ।

उदाहरण (1) $x + 25 = 75$ को हल कीजिए ।

$x + 25 = 75$

या $x + 25 - 25 = 75 - 25$

$x = 50$

उदाहरण (2) $\frac{x}{4} = 15$

$\frac{x}{4} \times 4 = 15 \times 4$

$x = 60$

हरण (3) $8x = 96$ को हल कीजिये।

$$8x \times \frac{1}{8} = 96 \times \frac{1}{8}$$

या $x = 12$ उत्तर

अभ्यासमाला 1

परावर्त्य योजयेत् के प्रयोग से x का मान ज्ञात कीजिये।

$\frac{x}{8} = 1$ (2) $9x - 7 = 14$

$5(x+3) = 3(2x+1)$ (4) $\frac{x-8}{2} = \frac{x-3}{3}$

$4(x-6) = x-3$

उत्तरमाला

$x = 8$ (2) $x = \frac{7}{3}$ (3) $x = 12$

$x = 18$ (5) $x = 7$

सरल समीकरण का हल करना ।

- सूत्र परावर्त्य योजयेत्

उपरोक्त सूत्र का अर्थ है पक्षांतरण तथा समायोजन । सूत्र के ोगों से गणनायें मौखिक करके भी उत्तर एक पंक्ति में लिखा जा है।

1 **प्रथम अनुप्रयोग : यदि $ax + b = cx + d$ हो तो $x = \frac{d-b}{a-c}$**

क्योंकि $(ax - cx) = d - b$

या $x(a-c) = d - b$

या $x = \frac{d-b}{a-c}$ या $\frac{b-d}{c-a}$

ा (1) यदि $4x+3 = 2x+9$, तो $x = \frac{9-3}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$

(2) यदि $7x-1=2x+24$, तो $x=\frac{24-(-1)}{7-2}=\frac{25}{5}=5$

(3) यदि $2x+15=4x+7$, तो $x=\frac{15-7}{4-2}=\frac{8}{2}=4$

20.3.2 द्वितीय अनुप्रयोग :

यदि $(x+a)(x+b)=(x+c)(x+d)$ तो $x=\frac{cd-ab}{(a+b)-(c+d)}$

$x^2+x(a+b)+ab=x^2+x(c+d)+cd$

या $x\{(a+b)-(c+d)\}=cd-ab$

या $x=\frac{cd-ab}{(a+b)-(c+d)}$ या $x=\frac{ab-cd}{(c+d)-(a+b)}$

उदाहरण (1) समीकरण $(x+1)(x+2)=(x-3)(x-4)$ को सरल कीजि

परावर्त्य सूत्र द्वारा $x=\frac{12-2}{1+2+3+4}=\frac{10}{10}=1$

उदाहरण (2) समीकरण $(x+4)(x+5)=(x+2)(x+3)$ को सरल कीजि

परावर्त्य सूत्र द्वारा $x=\frac{6-20}{4+5-2-3}=\frac{-14}{4}=-\frac{7}{2}$

उदाहरण (3) समीकरण $(x-2)(x-5)=(x-1)(x-4)$ को सरल की

परावर्त्य सूत्र द्वारा $x=\frac{4-10}{-2-5+1+4}=\frac{-6}{-2}=3$

अभ्यासमाला 2

परावर्त्य सूत्र से समीकरण सरल कीजिए।

प्रथम अनुप्रयोग पर आधारित -

(1) $5x-2=3x-4$ (2) $2x+7=x+9$

(3) $11x-5=16x-30$ (4) $42x+35=28x-7$

द्वितीय अनुप्रयोग पर आधारित -

(5) $(x-7)(x-9)=(x-3)(x-22)$

) $(x+7)(x+9) = (x-8)(x-11)$

) $(x+7)(x+9) = (x+3)(x+22)$

) $(x+5)(x+1) = (x+3)(x+2)$

) $(x-1)(x+6) = (x+1)(x-2)$

उत्तरमाला

) $x = -1$ (2) $x = 2$ (3) $x = 5$ (4) $x = -3$

) $x = \frac{1}{3}$ (6) $x = \frac{5}{7}$ (7) $x = -\frac{1}{3}$ (8) $x = 1$

) $x = \frac{2}{3}$

.3.3 तृतीय अनुप्रयोग : यदि $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{p}{q}$ **तो** $x = \frac{dp-bq}{aq-cp}$

$$(ax+b)q = (cx+d)p$$

$$aqx + bq = cpx + dp$$

$$x(aq-cp) = dp - bq$$

$$x = \frac{dp-bq}{aq-cp}$$

हरण (1) $\frac{2x+3}{3x+4} = \frac{1}{3}$ **तो x का मान ज्ञात कीजिये।**

सूत्र द्वारा $x = \frac{4\times1-3\times3}{2\times3-3\times1} = -\frac{5}{3}$

हरण (2) $\frac{3x+1}{2x+7} = \frac{2}{3}$ **तो x का मान ज्ञात कीजिये।**

सूत्र द्वारा $x = \frac{7\times2-1\times3}{3\times3-2\times2} = \frac{11}{5}$

.3.4 चतुर्थ अनुप्रयोग : यदि $\frac{m}{x+a} + \frac{n}{x+b} = 0$ **तो** $x = \frac{-mb-na}{m+n}$

$m(x+b) + n(x+a) = (x+a)(x+b) \times 0$

$x(m+n) + mb + na = 0$

या $x = \frac{-mb-na}{m+n}$

उदाहरण (1) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}=0$; x **का मान ज्ञात कीजिये।**

सूत्र द्वारा $x = \frac{(-1)\text{x}3-2\text{x}2}{1+2} = \frac{-3-4}{3} = \frac{-7}{3}$

उदाहरण $\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x+5}=0$; x **का मान ज्ञात कीजिये।**

सूत्र द्वारा $x = \frac{-1\times5-3\times3}{1+3} = \frac{-5-9}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$

अभ्यासमाला 3

(सूत्र परावर्त्य योजयेत् के अनुप्रयोग)

समीकरण सरल कीजिए।

(1) $\frac{3x+5}{2x+7}=4$

(2) $\frac{2x+1}{3x-2}=\frac{5}{9}$

(3) $\frac{1-9y}{19-3y}=\frac{5}{8}$

(4) $\frac{5y-3}{2y+1}=\frac{2}{5}$

(5) $\frac{3y+5}{3-2y}=\frac{5}{3}$

(6) $\frac{2x}{3x+1}=-3$

(7) $\frac{\text{y}-(7-8\text{y})}{9\text{y}-(3+4\text{y})}=\frac{2}{3}$

(8) $\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+6}=0$

(9) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=0$

(10) $\frac{5}{x+4}+\frac{4}{x+5}=0$

(11) $\frac{3}{x+5}+\frac{5}{x-3}=0$

(12) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=0$

उत्तरमाला

(1) $-\frac{23}{5}$	(2) $-\frac{19}{3}$	(3) $-\frac{87}{57}$
(4) $\frac{17}{21}$	(5) 0	(6) $-\frac{3}{11}$
(7) $\frac{15}{17}$	(8) $-\frac{13}{2}$	(9) $-\frac{3}{2}$
(10) $-\frac{41}{9}$	(11) -2	(12) $\frac{1}{5}$

20.4 एक घातीय समीकरण : सूत्र-शून्यं साम्यसमुच्चये

विशेष प्रकार के समीकरणों का हल सूत्र-''शून्यं साम्यसमुच्चये'' के अनुप्रयोग से मात्र अवलोकन से एक ही पंक्ति में लिखा जा सकता है। सूत्र का अर्थ है ''जब समुच्चय एक समान हो तो उस समुच्चय का मान शून्य होता है।'' तकनीकी शब्द होने के कारण समुच्चय के अनेक अर्थ होते हैं।

20.4.1 समान समुच्चय का प्रथम अर्थ तथा अनुप्रयोग :

जब समीकरण के दोनों पक्षों के सभी पदों में एक बीजीय गुणनखण्ड सर्वनिष्ठ हो तो उस बीजीय पद का मान शून्य होता है। तथा उसी से समीकरण का हल प्राप्त होता है। देखिए निम्न उदाहरण -

उदाहरण (1) समीकरण $12x + 3x = 4x + 5x$ को सरल कीजिए।

समीकरण के प्रत्येक पद में x एक सर्वनिष्ठ खण्ड है अतः सूत्रानुसार $x = 0$ उत्तर

उदाहरण (2) समीकरण $2(x+1) = 7(x+1)$ को सरल कीजिए।

समीकरण के प्रत्येक पद में $(x+1)$ एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है अतः सूत्रानुसार

$x + 1 = 0$ अतः $x = -1$ उत्तर

उदाहरण (3) **समीकरण** $\frac{4(2x-3)}{7} = \frac{3(2x-3)}{5} + \frac{2x-3}{4}$ **को सरल कीजिए।**

सभी पद में सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड $= 2x - 3 = 0$ अतः $x = \frac{3}{2}$

20.4.2 समान समुच्चय का द्वितीय अर्थ तथा अनुप्रयोग : एकघाती समीकरण के दोनों पक्षों में चर राशि रहित (स्वतन्त्र) पद समान होते हैं तो चर राशि का मान शून्य होता है। अर्थ एवं अनुप्रयोग को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है -

उदाहरण (4) समीकरण $(x+3)+(2x+5)+4 = 2(x+6)$ को सरल कीजिए ।

दोनों पक्षों में x रहित परस्पर समान $= 12$

अतः $x = 0$ उत्तर

उदाहरण (5) समीकरण $(x+2)(x+3)=(x+1)(x+6)$ को हल करें ।

दोनों पक्षों में x रहित पद समान $= 6$ हैं इसलिए $x = 0$

<u>ध्यातव्य</u> : यद्यपि यह द्विघाती समीकरण मालूम होता है परन्तु दोनों पक्षों में x^2 का गुणांक भी समान है जो परस्पर कट जाता है। अतः ऐसे समीकरणों पर उपरोक्त एकघाती समीकरण का नियम लगाया जा सकता है।

अभ्यासमाला 4

समीकरण हल कीजिए (सूत्र शून्यं साम्यसमुच्चये के अनुप्रयोग)

(1) $x-5x-3x+12x=6x$ (2) $(x+5)+(2x+3)=5x+8$

(3) $\frac{x-1}{3} = \frac{x-1}{5}$ (4) $3(x+1)+2(x+2)=2(x+3)+(x+1)$

(5) $\frac{a}{x+a} = \frac{b}{x+a}$ (6) $x+\{3x-(4x+x)\}=2x+\frac{x}{x}$

(7) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=x-\frac{x}{2}-\frac{x}{5}$

(8) $2\frac{(x-5)}{3}-\frac{3(x-5)}{2}=0$

(9) $(x+2)(x+8)=(x+4)(x+4)$

(10) $a(x+1)+b(x+1)=c(x+1)+d(x+1)$

उत्तरमाला

(1) 0	(2) 0	(3) 1	(4) 0	(5) -a
(6) 0	(7) 0	(8) 5	(9) 0	(10) -1

20.4.3 समान समुच्चय का तृतीय अर्थ एवं अनुप्रयोग :

समान समुच्चय का तीसरा अर्थ ऐसी दो भिन्नों के हरों के योग से है जिनके अंश परस्पर समान हों। देखिए निम्न उदाहरण -

उदाहरण (1) समीकरण $\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3x-1}=0$ को हल कीजिये।

दोनों भिन्नों के अंश परस्पर समान = 1 अतः हरों का योग

$2x-1+3x-1=0$

$5x=2$ या $x=\frac{2}{5}$

उदाहरण (2) समीकरण $\frac{m}{x-a}+\frac{m}{3x-b}=0$ को हल कीजिये।

अंश 'm' समान हैं, सूत्र अनुसार $x-a+3x-b=0$ या $4x=a+b$

अतः $x=\frac{a+b}{4}$

उदाहरण (3) समीकरण $\frac{6}{x-4}+\frac{6}{2x-5}=0$ को सरल कीजिये।

अंश समान हैं, सूत्र अनुसार $(x-4)+(2x-5)=0$ या $3x-9=0$

अतः $x=3$

20.4.4 समान समुच्चय का चतुर्थ अर्थ एवं अनुप्रयोग :

समान समुच्चय का चौथा अर्थ उस सरल अनुपात से है जो दोनों पक्षों के अंशों के योग तथा दोनों पक्षों के हरों के योग के मध्य होता है। यह अनुपात 1:1 अथवा 1:2 भी हो सकता है। इन दोनों योगों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रखने पर समीकरण का हल प्राप्त होता है। सरल अनुपात 1:1 हो तो अंशों का योग = हरों का योग। निम्न उदाहरण देखिए -

उदाहरण (1) समीकरण $\frac{2x+9}{2x+7}=\frac{2x+7}{2x+9}$ को हल कीजिए।

दोनों पक्षों के अंशों का योग = हरों का योग

$2x+9+2x+7=4x+16$ यहां अनुपात 1:1 है, सूत्र प्रभावी, है

अत: $4x + 16 = 0$ या $x = -4$ उत्तर।

उदाहरण (2) समीकरण को हल कीजिए $\frac{3x+4}{6x+7}=\frac{x+1}{2x+3}$

दोनों अंशों का योग = $3x+4+x+1 = 4x+5$ ...... (i)

दोनों हरो का योग = $6x+7+2x+3 = 8x+10 = 2(4x+5)$ ...(ii)

योग (i) व योग (ii) का अनुपात= 1 : 2 अत: सूत्रानुसार

दोनों में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = $4x+5 = 0$ अत: $x = -\frac{5}{4}$ उत्तर

<u>ध्यातव्य</u> (1) जिन समीकरणों में गणना करने पर x^2 के गुणांक समान होने पर परस्पर कट जाते हैं उनको एकघांती समीकरणों के अन्तर्गत लिया जाता है। यहां चर राशि का एक ही मान आता है।

(2) जिन समीकरणों में गणना करने पर पद x^2 का लोप नहीं होता है, उनमें चर राशि के दो मान आते हैं। एक मान इस विधि से ज्ञात हो सकता है। तथा दूसरा मान इसी सूत्र के अर्थ एवं अनुप्रयोग से ज्ञात होगा जो अभी तक हमारे पाठ्यक्रम में नहीं है ।

अभ्यासमाला 5

(सूत्र शून्यं साम्यसमुच्चये के अनुप्रयोग)

समीकरण सरल कीजिए -

(1) $\frac{2x+3}{2x+5}=\frac{2x+5}{2x+3}$ (2) $\frac{3x+1}{3x+4}=\frac{3x+4}{3x+1}$

(3) $\frac{2x+1}{2x+5}=\frac{2x+7}{2x+3}$ (4) $\frac{3x+5}{3x+4}=\frac{3x+6}{3x+7}$

समीकरण का केवल एक मान ज्ञात कीजिए।

(5) $\frac{6x+11}{11x+6}=\frac{11x+6}{6x+11}$ (6) $\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{3x+4}{2x+3}$

(7) $\frac{3x+4}{6x+7}=\frac{5x+6}{2x+3}$ (8) $\frac{4x+5}{7x+3}=\frac{5x+7}{2x+9}$

उत्तरमाला

(1) $x = -2$ (2) $x = -\frac{5}{6}$ (3) $x = -2$

(4) $x = \frac{-11}{6}$ (5) $x = -1$ (6) $x = -\frac{7}{5}$

(7) $-\frac{5}{4}$ (8) $-\frac{4}{3}$

अध्याय 21

कूटांक परिचय

21.1 किसी संख्या को जब अक्षर के रूप में व्यक्त जाता है । उसे ''कूटांक'' कहते हैं। अपने ऋषियों ने इस संकल्पना का संख्याओं को अभिव्यक्त करने में प्रयोग किया था, जिससे बड़ी-बड़ी राशियों को वे सुगमता से याद कर लेते थे । प्राचीन काल में तीन प्रकार की कूटांक पद्धतियां प्रचलित थीं जिनका प्रयोग ज्योतिषादि ग्रन्थों में किया गया है।

21.1.1 व्यञ्जनांक पद्धति - अथर्व वेद के 'गणित सूत्र' के भाग में कंस के राज्य की बुराई के तथ्य दिए हैं जिसे पढ़ कर उदारवादी अंग्रेज कोब्रुक ने कहा कि वेद का यह भाग मेरी समझ में नहीं आया । इसे ही पढ़ कर मंद बुद्धि और मन वाले व्यक्ति होरेस हेमन विल्सन ने इसे बेहुदा कहा। स्वामी जी ने सोचा कि वेदों का पूरी प्रकार से अध्ययन करने के लिए संस्कृत की बहुआयामी भाषाई गुत्थियां समझने की आवश्यकता है । अनेक वर्षों तक वन में तपस्या और ध्यान के उपरांत उनके हाथ में इन सूत्रों के अर्थ की कुंजी आ गई । इसमें अंकों (0 से 9 तक) को ''व्यञ्जनों'' के रूप में व्यक्त किया जाता है। स्वरों का उपयोग करते हुए सरल शब्द बनाये जाते हैं।

21.1.2 वर्णांक पद्धति - इसमें अंकों (0 से 9 तक) को ''व्यंजनों'' के तथा स्थानीय मानों (इकाई, दहाई, सैकड़ा ......) को स्वरों के रूप में व्यक्त किया जाता है।

21.1.3 शब्दांक पद्धति - इसमें अंकों (0 से 9 तक) को ''व्यंजनों'' तथा कुछ संख्याओं को ''शब्दों'' (शब्दों के पर्यायवाची) के रूप में व्यक्त किया जाता है।

अंक और उनके लिए प्रयुक्त शब्द ये हैं :-

1	-	चन्द्र	6	-	ऋतु
2	-	नेत्र	7	-	सागर
3	-	भुवन	8	-	वसु
4	-	वेद	9	-	ग्रह
5	-	वाण	10	-	दिशा

'व्यञ्जनांक पद्धति' का वर्णन विस्तार से किया जा रहा है।

21.2 व्यञ्जनांक पद्धति के लिए सूत्र - इस पद्धति का सूत्र निम्नवत् है :-

" कादि नव टादि नव पादि पञ्चक याष्टक क्षः शून्यम् च' इस सूत्र का भावार्थ है 'क से प्रारम्भ करके नौ अक्षर पर्यन्त, ट से प्रारम्भ करके नौ अक्षर पर्यन्त, प से प्रारम्भ करके पाँच अक्षर पर्यन्त, य से प्रारम्भ करके आठ अक्षर पर्यन्त क्रमानुसार अंकों को व्यक्त करते हैं एवं क्ष शून्य को व्यक्त करता है।''

इसको इस प्रकार लिखा जा सकता है।

1.	क	ट	प	य
2.	ख	ठ	फ	र
3.	ग	ड	ब	ल
4.	घ	ढ	भ	व
5.	ङ	ण	म	श
6.	च	त		ष
7.	छ	थ		स
8.	ज	द		ह
9.	झ	ध		
0		क्ष (क्षुद्र)		

<u>ध्यातव्य</u> - न को 5 एवं क्षुद्र को 0 के अर्थ में प्रयोग किया जाता है।

21.2.1 अनुप्रयोग - इस पद्धति के अनुप्रयोग निम्नवत् हैं :-

3.1 संख्या का कूटांक में रूपान्तरण - उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करते हुए संख्या को कूटांकों में रूपान्तरित किया जाता है।

उदाहरण (1) 80 को कूटांकों में रूपान्तरित करें।

हल : 80 = दक्ष

चरण (क) 0 का कूटांक क्ष है।

(ख) 8 का कूटांक द ही है जिससे सार्थक शब्द बनता है।

(ग) सार्थक शब्द दक्ष है।

<u>ध्यातव्य</u> (1) कूटांकों को स्थानीय मान के अनुसार लिखा जाता है।

(2) एक ही संख्या के अनेक शब्द भी बनाए जा सकते हैं।

उदाहरण (2) रूपान्तरित करें।

(क) 10 (ख) 11 (ग) 22

हल -(क) 10 = कक्ष, कुक्षि, पक्ष, यक्ष

(ख) 10 = काका, यज्ञ, काक, कष्ट, ध्येय, टूटी, टाट, पुष्प, पुण्य, कूट, एकाएक, कृपा, कूप, काया आदि।

(ग) 22 = खीर, खुर, राष्ट्र, खैर, राखी, राख

उदाहरण (3) रूपान्तरित करें।

(क) 62 (ख) 888 (ग) 413

हल (क) 62 = चन्द्र (ख) 888 = जहाज

(ग) 413 = भोपाल

21.2.2 कूटांक का संख्या में रूपान्तरण - उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करते हुए कूटांकों को संख्या में रूपान्तरित किया जाता है।

उदाहरण (4) हाट को संख्या में रूपान्तरित करें।

हल हाट = 81

चरण (क) ट का अंक 1 है।

(ख) ह का अंक 8 है।

(ग) संख्या 81 है।

<u>ध्यातव्य</u> **(1)** अक्षरों को स्थानीय मान के अनुसार लिखा जाता है।

(2) अर्द्ध अक्षर और स्वर का कोई मान नहीं होता ।

उदाहरण (5) रूपान्तरित करें।

(क) हवा (ख) व्यञ्जक (ग) कुत्ता

हल (क) हवा = 84 (ख) व्यञ्जक = 181 (ग) कुत्ता=16

<u>ध्यातव्य</u> - मूल संक्रियाओं को भी हल किया जा सकता है।

उदाहरण (6) ठहर एवं शहर क्या होगा ?

हल- ठहर एवं शहर दो चाभी होगा ।

(अर्थात् 282 एवं 582, 864 होगा)

उदाहरण (7) भोपाल एवं लाहौर के मध्य में क्या है ?

हल - भोपाल एवं लाहौर के मध्य में लोक है। (मध्य अर्थात् अन्तर)
(अर्थात् 413 एवं 382 के मध्य में 31 है।)

अभ्यासमाला

(1) रूपान्तर लिखें।
(क) 5 (ख) 0 (ग) 3 (घ) 9

(2) रूपान्तर लिखें।
(क) घ (ख) च (ग) ह (घ) प

(3) रूपान्तर लिखें।
(क) 41 (ख) 75 (ग) 50 (घ) 15

(4) रूपान्तर लिखें।
(क) अटल (ख) चींटी (ग) सीता (घ) राम

(5) हीरा एवं मोती कितना है?

उत्तरमाला

(1) (क) ङ , ण, म, श (ख) क्ष, क्षुद्र (ग) ग, ड, ब, ल
(घ) झ, ध

(2) (क) 4 (ख) 6 (ग) 8 (घ) 1

(3) (क) भाप, वय, भाट, भेक (ख) सीमा, असीम, थम
(ग) मोक्ष (घ) कृष्ण

(4) (अ) 13 (ख) 61 (ग) 76 (घ) 25

(5) कागज

कूटांक का प्रयोग कर बड़ी-बड़ी संख्याओं को सरलता से याद रखने का तरीका हमारे ऋषियों, गणितज्ञों की अद्‌भुत देन है। ऐसे ही आश्चर्यचकित करने वाले कुछ उदाहरण यहां देखेंगे -

उदाहरण (1) कैवलैः सप्तकं गुण्यात् ।

यहां सप्तक का अर्थ सात है तथा कैवलैः का अर्थ 143 है।
सात के लिए हमारा गुणक 143 है।
यहां एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र के प्रयोग से -

$143 \times 999 = 142857$

अतः $\frac{1}{7} = .\dot{1}4285\dot{7}$

इससे भी आश्चर्यचकित करने वाला वह श्लोक है जो प्रथम अर्थ में भगवान श्री कृष्ण की स्तुति तथा द्वितीय अर्थ में भगवान शंकर की स्तुति का भाव प्रकट करता है वहीं $\frac{\pi}{10}$ का मान बत्तीस अंकों तक प्रदान करता है। यह अपने आप में शोध का विषय है।

गोपी भाग्य मधुवात-शृंगिशोदधिसंधिग।
खलज़ीवित खाताव-गलहालारसंधर।।

$\frac{\pi}{10} = 0.31415946535897932384626433832792$

कूटांक का प्रयोग ऐतिहासिक रुचि का विषय है। जिज्ञासु अन्य ग्रंथों का अध्ययन कर आनन्द प्राप्त कर सकते हैं।

अध्याय 22

वैदिक गणित की कुछ पद्धतियों के लिए तर्क

22.1 बीजांक (नवशेष) पद्धति - किसी भी संख्या में 9 से भाग देने पर शेष कितना बचेगा यह जानना भाग दिए बिना ही हो जाता है। उदाहरण से समझें।

$$5782 = 5000+700+80+2$$
$$= 5(999+1)+7(99+1)+8(9+1)+2$$
$$= (5\times 999+7\times 99+8\times 9) + (5+7+8+2)$$

पहले कोष्ठ का हर पद 9 से विभाजित हो सकता है। अत: 5782 में 9 से भाग देने पर उतना ही शेष बचेगा जितना इस संख्या के अंकों के जोड़ 5+7+8+2 = 22 में 9 से भाग देने पर बचेगा। इस प्रकार प्राप्त संख्या 22 पर यह नियम फिर लगाने पर 2+2 आता है। अत: 5782 में 9 से भाग देने पर शेष 4 बचेगा। यही 4 दी हुई संख्या का बीजांक या नवशेष कहा जाता है।

जोड़, घटाव, गुणा, भाग, वर्ग, घन, वर्गमूल, घनमूल इत्यादि में इसके द्वारा जांच की जाती है। मान लें कि दो संख्याएं x और y हैं जिनके बीजांक l और m हैं। अत:

$x = 9a+l$, $y= 9b+m$

ऐसा लिखा जा सकता है। इतना ही जानना काफी है कि a, b पूर्णांक हैं।

$x+y = (9a+l)+ (9b+m) = 9(a+b) + (l+m)$

$x+y$ का बीजांक $= l + m$ या $(l + m)$ का बीजांक

$= x$ का बीजांक $+ y$ का बीजांक

अर्थात् संख्याओं के बीजांकों के जोड़

= योग का बीजांक

इसी तरह संख्याओं के बीजांकों के अन्तर का बीजांक = अन्तर का बीजांक

$xy = (9a+l)(9b+m) = (81ab+9am+9bl) + lm$

अत: xy का बीजांक $= lm$ का बीजांक

अर्थात् दो संख्याओं के बीजांकों का गुणनफल

= संख्याओं के गुणनफल का बीजांक

ध्यान दें कि एक अंक से बड़ा बीजांक आ रहा हो तो उसे एक अंक का बना लें।

सतर्कता : संकलन (जोड़), व्यवकलन (घटाव)और गुणा में उक्त जांच से पता लगे कि उत्तर गलत है तो उत्तर जरूर गलत होगा परन्तु इस जांच से पता लगे कि उत्तर सही है तो उत्तर सही होना आवश्यक नहीं है। उदाहरण देखें।

95x95 = 9025 होता है। गलती से 95x95 करने में उत्तर 9205 लिख दिया गया। नवशेष पद्धति इस गलती को नहीं पकड़ेगी। क्योंकि 95 का नवशेष 5 है । 5x5=25 का नवशेष 7 है। और 9205 का नवशेष भी 9+2+0+5 = 16 तथा 1+6= 7 होने से 7 ही है।

इसके लिए एकादश शेष पद्धति का भी साथ साथ उपयोग करने से गलती रह जाने की सम्भावना लगभग समाप्त हो जाती है।

22.2 एकादशशेष पद्धति - 11 से किसी संख्या में भाग देने पर बचा शेष उस संख्या का एकादशशेष है।

दो अंकों की संख्या का एकादशशेष ज्ञात करना

95 = 9x10+5 = 9(11-1)+5= 9x11-9+5

पहले पद 9x11 में 11 से भाग लगता है। अतः 95 का एकादशशेष = -9+5 का एकादशशेष -4 या -4+11 = 7

तीन या चार अंकों की संख्या का एकादशशेष उदाहरण द्वारा देखें ।

5782 = 57x100+82 = 57(99+1)+82= 57x 99+57+82

परन्तु 57 का एकादशशेष ऊपर समान -5+7 और 82 का -8+2 है ।

अतः 5782 का एकादशशेष = -5+7-8+2 का एकादशशेष

= -13+9 = -4 या -4+11 = 7

ध्यातव्य :

(क) एकादश शेष के लिए दाएं से दो दो अंकों के समूह बना कर प्रत्येक समूह का एकादशशेष प्राप्त कर उनका आपस में योग कर लें और आवश्यकता हो तो इस योग का सीधे एकादशशेष निकाल लें ।

(ख) दूसरी पद्धति है कि संख्या के अंकों को इस प्रकार जोड़ें और घटाएं -- दाईं ओर का पहला अंक - दूसरा अंक + तीसरा - चौथा आदि । उत्तर का एकादशांक निकाल लें ।

(ग) एकादशशेष ज्ञात करने में जो संख्या प्राप्त होती है वह ऋणात्मक हो तो 11 जोड़े । फिर भी ऋणात्मक हो तो फिर 11 जोड़ें । संख्या यदि 11 या 11 से बड़ी हो तो 11 घटा दें ।

प्रयोग :- x और y के एकादशशेष l और m हों तो

$$x = 11a+l,\ y = 11b+m$$

$$x+y = 11(a+b)+l+m$$

$$x-y = 11(a-b)+l-m$$

$$xy = (11a+l)(11b+m) = 121ab+11am+11bl+lm$$

$$= 11(11ab+am+bl)+lm$$

अतः दो संख्याओं के योग का एकादशशेष = एकदशशेषों का योग

उनके अन्तर का एकादश शेष = एकादशशेषों का अन्तर

उनके गुणनफल का एकादशशेष = एकादशशेषों का गुणनफल

22.3 तीन अंकों के गुणा के लिए निखिलं पद्धति

उदाहरण से समझें : $98 \times 104 \times 92 = (100-2)(100+4)(100-8)$

(आधार 100 लिया)

$$= 100^3 + 100^2(\bar{2}+4+\bar{8}) + 100(\bar{2} \times 4 + \bar{2} \times \bar{8} + 4 \times \bar{8}) + \bar{2} \times 4 \times \bar{8}$$

$$= 100^2(100+\bar{2}+4+\bar{8}) + 100(\bar{2} \times 4 + \bar{2} \times \bar{8} + 4 \times \bar{8}) + \bar{2} \times 4 \times \bar{8}$$

उत्तर में 3 स्थान होंगे। आधार में दो शून्य होने के कारण प्रत्येक स्थान में दो अंक होंगे। दो से कम हों तो बाईं ओर शून्य लिखकर तथा दो से अधिक हों तो बायां अंक बाईं ओर के स्थान में जोड़कर उत्तर प्राप्त करेंगे। इस प्रकार पहले खण्ड में लिखी संख्या का स्थानीय मान 100^2 गुणा होगा, दूसरे खण्ड की संख्या का स्थानीय मान 100 गुणा होगा। यही अभीष्ट है।

$(100+\bar{2}+4+\bar{8}) / \bar{2} \times 4 + \bar{2} \times \bar{8} + 4 \times \bar{8} / \bar{2} \times 4 \times \bar{8}$ यह उत्तर है।

22.4 ऊर्ध्व तिर्यक् पद्धति - मान लीजिए 495 को 388 से सामान्य रीति से गुणा कर रहे हैं तो निम्नांकित होगा । यदि हम हासिल का

सीधा उपयोग न करें ।

सामान्य पद्धति

		3	8	8
		4	9	5
		5x3	5x8	5x8
	9x3	9x8	9x8	
4x3	4x8	4x8		

वैदिक गणित पद्धति

	9x3	5x3	5x8	
4x3	4x8	9x8	9x8	5x8
		4x8		

ऊर्ध्व तिर्यक् का उपयोग कर इसी प्रकार से लिखवते हैं । प्रत्येक स्थान पर एक अंक रखकर अन्य अंक (यदि हो तो) अगली बायीं संख्या में मिलाए जाते हैं ।

22.5 एकाधिकेन से गुणा - दोनों संख्याओं में दहाई स्थान पर समान अंक और इकाई स्थानों के अंकों का योग 10 हो तो यह पद्धति दो अंकों की संख्याओं के गुणन में लगती है। उदाहरण से समझें

उदाहरण (1) $34\times 36 = (30+4)(30+6)=30^2+30(4+6)+4\times 6$

$= 30(30+10)+4\times 6= 3\times 4\times 100+4\times 6$

आधार 10 है। इसमें एक शून्य है। उत्तर के दो खण्ड बनाएं। दाहिने खण्ड में आधार में शून्य की संख्या का दो गुना अर्थात् दो स्थान होंगे। इसके कारण बायें खण्ड की संख्या का स्थानीय मान 100 गुना होगा। अत: उत्तर 3x4/ 4x6 या 1224 होगा।

उदाहरण (2) 502 x 598 ऐसे उदाहरणों को देखें। 02+98 = 100 है और उसके पहले 5 दोनों संख्याओं में है। 100 आधार (दाहिने खण्ड में 4 स्थान) लेकर उक्त विधि से बनाने का तर्क स्वयं विकसित करें। उत्तर यह होगा -

5x6/02x98 = 30/0196 = 300196

उदाहरण (3) जिस संख्या के अन्त में 5 हो उसका वर्ग इस पद्धति से निकल सकता है।

$35^2 = 3x4/5^2 = 1225$, चूंकि $35^2 = 35x35$ है और $5+5=10$ है।

22.6 द्वन्द्वयोग से वर्ग करना - माना कि 3456 का वर्ग करना है। चार अंक हैं अत: 4x2-1= 7 द्वन्द्व समूह बनेंगे और उत्तर में एक एक स्थान वाले 7 ही खण्ड भी होंगे।

3^2	2x3x4	2x3x5	2x3x6	2x4x6	2x5x6	6^2
		$+4^2$	+2x4x5	$+5^2$		
a^2	$2ab$	$2ac+b^2$	$2ad+2bc$	$2bd+c^2$	$2cd$	d^2

यदि $a = 3, b = 4, c = 5, d = 6$ माना तो प्रत्येक खण्ड की संख्याओं को a, b, c, d के रूप में लिखा है। स्थानीय मान के साथ ये संख्याएं $a^2 \times 10^6, 2ab \times 10^5, (2ac+b^2) \times 10^4$ .... $2cd \times 10, d^2$ हैं।

$A = 1000a, B = 100b, C=10c, D = d$ मानने पर यह संख्या

$= A^2 + 2AB + (2AC+B^2) + (2AD+2BC) + (2BD+C^2) + 2CD + D^2$

$= A^2+B^2+C^2+D^2+2AB+2AC+2AD+2BC+2BD+2CD$

$= (A+B+C+D)^2$ (बीजगणित से)

$= (1000a + 100b + 10c + d)^2 = 3456^2$

22.7 यावदूनं सूत्र से वर्ग

$92^2 - 8^2 = (92 + 8)(92 - 8) = 100 \times 84$

$92^2 = 100 \times 84 + 8^2 = 84/64 = 8464$

तर्क स्पष्ट है। आधार में से संख्या जितनी कम या अधिक हो उतना ही और भी कम या अधिक करें ।

23.8 भाग -

सामान्य रूप से हम भाग की क्रिया दो या तीन अंकों में भाजक रख कर एक साथ करते हैं। वैदिक गणित में एक समय पर केवल एक अंक से ही भाग देते हैं। शेष पद द्वारा अगले अंक में गुणा कर पूर्व शेष को शुद्ध करते हैं।

उदाहरण - मान लीजिए हमें 628543 को 73 से भाग देना है-

वर्तमान पद्धति

```
73 ) 628543 ( 8610
     584
    -----
      445
      438
     ------
        74
        73
       ------
         13
         00
       ------
         13
```

इसी भाग को हम वैदिक गणित पद्धति से निम्न प्रकार से करेंगे- भाग की प्रक्रिया हम पहले सीख ही चुके हैं ।

हल - $$\begin{array}{c|ccccc|c} 7^{3} & 6 & 2 & {}_{6}8^{44} & {}_{2}5^{7} & {}_{0}4^{1} & {}_{1}3 \\ \hline & & 8 & 6 & 1 & 0 & 13 \end{array}$$

सर्वप्रथम 62 में 7 का भाग देने पर 6 शेष बचा तो प्रकट रूप में भाज्य 68 बना लेकिन ध्वजांक 3 है अत: 8 को ध्वजांक 3 से गुणा कर 68 में से घटाया तो भाज्य शेष 44 बचा।

यदि हम वर्तमान पद्धति का चरण दो देखें तो पता चलेगा कि वहां भी शेष 44 ही बचा है।

इसी प्रकार आगे देखें तो 44 को 7 से भाग देने पर 2 शेष बचा तो प्रकट भाज्य = 25 किन्तु 6 को ध्वजांक 3 से गुणा कर उसे प्रकट भाज्य में से घटाया तो शेष 7 बचा। वर्तमान पद्धति में भी यही हुआ है। अब 7 को 7 से भाग देने पर शेष 0 बचा और भागफल में प्राप्त अंक 1 को ध्वजांक से गुणा कर 4 में से घटाया तो शुद्ध शेष 1 बचा, सात

से । विभाजित नहीं हो सकता तो भागफल में शून्य लगाया, आगे शुद्ध शेष = 13-0x3 = 13-0 = 13

अर्थात् भागफल 8610 एव शेष 13 जो वर्तमान पद्धति से प्राप्त हुआ है।

केवल वैदिक गणित पद्धति में भाग देने के लिए एक ही अंक का प्रयोग हुआ और दूसरे अंक का ध्वजांक के रूप में रखकर शुद्ध भाज्य निकालने के लिए प्रयोग किया।

इस पद्धति से एक समय में एकअंकीय संख्याओं का ही गुणा करना होता है, जो सरल है ।

22.9 भाजकता

23.9.1 भाज्यता 2, 4, 8 से : 10 में 2 से पूरा भाग लग सकता है। अत: इकाई छोड़, शेष संख्या में 2 से जरूर भाग लगेगा। उदाहरण के लिए 573 = 570+3 और 570 में 2 से भाग लगेगा क्योंकि इसमें 10 से भाग लगता है। अत: किसी संख्या की 2 से भाज्यता के लिए उसके इकाई स्थान की संख्या में 2 से भाग लगना चाहिए।

इसी प्रकार 100 में 4 से भाग लगता है। इसलिए इकाई और दहाई से बनी संख्या में 4 से भाग लगेगा तो दी हुई संख्या में भी लगेगा।

1000 में 8 से भाग लगता है। अत: संख्या के इकाई, दहाई और सैकड़ा के स्थान के अंकों से बनी संख्या में 8 से भाग लगेगा तो संख्या में भी लगेगा।

22.9.2 भाज्यता 5, 25, 125 से : 10 में 5 से भाग लगता है। ऊपर के तर्क के अनुसार संख्या के इकाई में 5 से भाग लगे अर्थात् इकाई मे 5 या 0 हो तो संख्या में 5 से भाग लगेगा। इसी तरह इकाई और दहाई से बनी संख्या में 25 से भाग लगे तो पूरी संख्या में 25 से भाग लगेगा और इकाई, दहाई और सैकड़ा के अंकों से बनी संख्या में 125 से भाग लगे तो पूरी संख्या में 125 से लगेगा।

22.9.3 भाज्यता 3 व 9 से : अध्याय के प्रारम्भ में नवांक पर विचार हुआ है । नवांक में 9 से भाग लगे तो पूरी संख्या में भाग लगेगा । अर्थात् बीजांक 9 या 0 हो तो संख्या 9 से भाज्य है ।

3 से भाज्यता - किसी संख्या को $9a+r$ के रूप में लिखा जा सकता

है। जहां r नवांक है। और $9a$ में 3 से अवश्य भाग लगता है। अत: नवांक में 3 से भाग लगे तो पूरी संख्या में 3 से भाग लगेगा।

22.9.4 भाज्यता 7, 11 और 13 से : 7x11x13 = 1001 होता है, अत: 1001 के गुणक किसी संख्या से कम करने से उस संख्या की 7,11 और 13 से भाज्यता में कोई परिवर्तन नहीं होता ।

दी हुई संख्या की दाहिनी ओर से तीन-तीन अंकों के खण्ड बना लें । क्रिया को उदाहरण से समझाया जा रहा है।

उदाहरण (1) 234568 की 7, 11 और 13 से भाज्यता जांचें।

क्रिया और तर्क : तीन-तीन अंकों के खण्ड बनाएं। पहला खण्ड 568 और दूसरा 234 है। अन्तिम खण्ड 234 को 1001 से गुणा करने पर 234234 होता है।

चूंकि 1001 में 7, 11 और 13 से भाग लगता है अत: 234234 में भी लगेगा। दी हुई संख्या में से इसे घटाने पर भाज्यता पर कोई असर नहीं पड़ेगा। घटाने पर

234568 - 234234 = 568-234 = 334

अत: दी हुई संख्या की भाज्यता की जाँच न कर उसके खण्ड 568 में बाईं ओर का खण्ड 234 घटा कर मिली संख्या की भाज्यता जांचेंगे जो आसान है। इस प्राप्त संख्या 334 में भाग देकर देखें । 7 से भाग नहीं लगता, 11 से नहीं लगता और 13 से भी नहीं लगता, अत: दी हुई संख्या में 7, 11, 13 से किसी से भी भाग नहीं लगेगा ।

संख्या में 6 अंक हैं। अंक कम हों तो बाईं ओर शून्य लगाकर दूसरा खण्ड पूर्ण करें। 6 से अधिक हों तो नीचे के उदाहरण के अनुसार करें।

उदाहरण (2) 12335789 की भाज्यता 7, 11 और 13 से जांचें।

खण्ड 12, 335 और 789 हैं।

```
12    12335     12335789
      12012     12012000
      ----      ------
                  323789
                  323323
                -----------
```

12x1001 = 12012 को अन्तिम दो खण्डों से बनने वाली संख्या में से घटाएं । घटाने पर 335-12 अर्थात् 323 होगा । 12335789 में 12012x1000 घटाने पर छ: अंकों की संख्या

323789 मिलेगी। भाज्यता नहीं बदलती। ऊपर उदाहरण (1) के अनुसार 789-323 = 466 अर्थात् 789-335+12 होगा। यह संख्या 7 से भाज्य हो तो दी हुई संख्या भी 7 से भाज्य होगी। 11 से हो तो 11 से और 13 से हो तो 13 से दी हुई संख्या भाज्य होगी।

नियम यह बना कि दाईं ओर से तीन-तीन अंकों के खण्ड बनाएं। पहले खण्ड में से दूसरा खण्ड घटाएं, तीसरा जोड़ें, चौथा घटाएं आदि, यह क्रम तब तक करें जब तक सभी खण्ड पूरे न हो जाएं। इस प्रकार प्राप्त संख्या में 7 से भाग लगे तो दी हुई संख्या में 7 से पूरा भाग लगेगा, 11 से लगे तो 11 से और 13 से लगे तो 13 से दी हुई संख्या में पूरा भाग हो जाएगा ।

<u>ध्यातव्य</u> (1) उक्त संख्या ऋणात्मक आए तो भी उक्त प्रकार से 7, 11, 13 से भाग देकर देख लें।

(2) 7 और 13 के लिए अन्य सीधा नियम नहीं है परन्तु 11 के लिए एक और पद्धति भी है। देखें 22.2

22.9.5 इकाई के स्थान पर 9 या 1 होने वाली संख्या से वेष्टन (आश्लेषक) द्वारा भाज्यता :

इकाई में 2, 4, 5, 6, 8, 0 हों तो संख्या के अपवर्तक 2 या 5 होंगे। ऐसे अपवर्तकों का अलग से विचार करना आसान है । ऐसे अपवर्तकों को भाग द्वारा हटा देने पर संख्या की इकाई में 1, 3, 7 या 9 ही बचेंगे ।

अन्त (इकाई) में 3 वाली संख्या को 3 से और अन्त में 7 वाली को 7 से गुणा करने पर अन्त में 9 आ जाता है। इसी तरह 3 वाली को 7 से और 7 वाली को 3 से गुणा करने पर अन्त में 1 आ जाता है। ऐसी संख्याओं से भाज्यता निम्नांकित विधि से ज्ञात की जा सकती है।

22.9.5.1 अन्त में 9 वाली संख्या के पूर्व अंक को एक अधिक (एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र का प्रयोग) करने पर वेष्टन प्राप्त होता है, जैसे 59 का वेष्टन 6 है।

तर्क :- किसी संख्या xy के इकाई स्थान पर y हो तो उसे 10x+y इस रूप में लिखा जा सकता है। भाज्यता जिससे जांचनी है उस संख्या के

अन्त में 9 हो और वेष्टन a हो तो वह संख्या $10a$-1 होगी।

$10a$-1 और $10a$ में उभयनिष्ठ अपवर्तक नहीं हैं, अत: दी हुई संख्या को $10a$ से गुणा करने से $10a$-1 या इसके किसी भाजक से भाज्यता पर असर नहीं पड़ेगा। अत: $10x+y$ के स्थान पर $(10x+y) \times 10a$ की भाज्यता जांचेंगे ।

$$(10x+y) \times 10a = 10x \times 10a + 10ay = 10x\,(10a-1+1) + 10ay$$
$$= 10x\,(10a-1) + 10(x+ay)$$

पहले भाग $10x(10a-1)$ में $10a$-1 से भाग लग जाता है, अत: भाज्यता जांचने में छोड़ा जा सकता है। इसी तरह 10 और $10a$-1 में उभयनिष्ठ अपवर्तक नहीं हैं अत: $10(x+ay)$ में 10 से भाग दिया जा सकता है। अत: $10a$-1 या उसके अपवर्तक से $10x+y$ विभाजित तब होगी जब $x+ay$ विभाजित हो।

उदाहरण (1) 65549 क्या 59 से विभाजित होगी?

क्रिया : 59 में पूर्व अंक 5 है, एकाधिकेन सूत्र से वेष्टन 6 है।

यहां $x = 6554$, $y = 9$, $a=6$

अत: $x+ay = 6554+9 \times 6 = 6608$ को जांचें।

यही तर्क 6608 पर लगाने पर 660+6x8=708 जांचें।

तीसरी बार तर्क लगाने पर 70+6x8=118 जांचें।

चौथी बार करने पर 11+6x8=59 जांचें।

हम तीसरी या चौथी बार के बाद कह सकते हैं क्योंकि 118 = 59x 2 होने के कारण विभाजित होता है और 59 भी विभाजित होता है।

वास्तविक क्रिया सरल है। व्याख्या (मौखिक क्रिया)

$_{59}6 \quad _{58}5 \quad _{58}5 \quad _{58}4 \quad 9$

9 x 6 = 54 और 4 जोड़ने पर 58

8 x 6 = 48 और 48+5+5=58

8 x 6 = 48 और 48+5+5= 58

8 x 6 = 48 और 48+6+5= 59

22.9.5.2 इकाई में 1 अंक वाली संख्याओं की भाज्यता -

इसके अन्तर्गत वह संख्या भी सम्मिलित है जिसका 3 या 7 से गुणा करके इकाई में 1 लाया जा सकता है।

हम जानते हैं 1 इकाई वाली कोई भी संख्या $10a$+1 से प्रकट हो

सकती है।

कोई संख्या xy लें इसका वास्तविक मूल्य $10x+y$ है।

$10a+1$ और $10a$ में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं हो सकता अत: $10a$ से $10x+y$ को गुणा करने से इसकी $10a+1$ (या उसके किसी भाजक) से भाज्यता पर कोई असर नहीं पड़ेगा।

$$(10x+y) \times 10a = 10x \times 10a + 10ay$$
$$= 10x\,(10a+1-1) + 10ay$$
$$= 10x\,(10a+1) - 10x + 10ay$$

$10a+1$ से भाज्यता जांचने में $10x(10a+1)$ छोड़ा जा सकता है क्योंकि यह तो $10a+1$ से विभाजित है । अत: $10x+y$ संख्या $10a+1$ से भाज्य है यदि $-10x+10ay$ अर्थात् $-10(x-ay)$ भाज्य है। साथ ही -10 और $10a+1$ में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं होने के कारण -10 से भाग देने पर सिद्ध होता है कि $10x+1$ की भाज्यता $10a+1$ या इसके किसी भाजक से जाँचनी हो तो $x-ay$ की भाज्यता जाँची जाए।

उदाहरण के लिए देखें 11.10

22.9.5.3 एक मजेदार बात पर ध्यान दें। किसी संख्या के अन्त में 1, 3, 7, 9 हो तो उस संख्या के दो वेष्टन (आश्लेषक) होंगे, एक तो इकाई में 9 लाने के लिए और दूसरा 1 लाने के लिए। इन दोनों वेष्टनों का योग उस संख्या के बराबर होता है। जैसे

13 : 13 x 3 = 39 वेष्टन = 4

13 : 13 x 7 = 91 ऋणात्मक वेष्टन = 9, दोनों का योग = 13

तर्क यह है । 13 को 3 और 7 से गुणा किया गया है जो परममित्र हैं। वेष्टन हेतु 13 x 3 में एक जोड़कर 13 x 7 में एक घटा कर 10 से भाग दिया है और इस प्रकार ये क्रमश:

$(13 \times 3 + 1) \div 10$ और $(13 \times 7 - 1) \div 10$ हैं ।

इन्हें जोडने पर $\{(13 \times 3 + 1) + (13 \times 7 - 1)\} \div 10$

$= (13 \times 3 + 13 \times 7) \div 10 = 13(3 + 7) \div 10 = 13$

यही स्थिति ऐसी प्रत्येक संख्या के लिए है जिसकी इकाई का अंक 1, 3, 7, 9 में से कोई भी है।

ऐसे ही 17 के धनात्मक एवं ऋणात्मक वेष्टनों अर्थात् 12 (119 से) एवं 5(51 से) का योग 17 ही है ।



विद्या भारती प्रकाशन